Conf. dr. ing. Emil CAZACU

Departamentul de Electrotehnică
Facultatea de Inginerie Electrică
Universitatea Politehnica Bucureşti

BAZELE ELECTROTEHNICII I, II

TEORIA CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE

NOTE DE CURS PENTRU UZUL STUDENȚILOR
FACULTĂȚII DE TRANSPORTURI

Specializarea:
Telecomenzi si Electronică în Transporturi (T.E.T.)

2012

CUPRINS

1.
CIRCUITE ELECTRICE LINIARE DE CURENT CONTINUU

Circuitele de curent continuu sunt acele circuite în care sursele de tensiune şi de curent furnizează la bornele lor mărimi invariabile în timp. În aceste condiții, după stingerea regimurilor tranzitorii, datorate unor eventuale procese de comutație, toate mărimile de circuit (curenți, tensiuni, potențiale) sunt de asemenea invariabile în timp. Aceste mărimi vor fi notate cu majuscule.

1.1 REŢELE ELECTRICE LINIARE – GENERALITĂŢI

Vom înțelege prin *rețea electrică* o mulțime de elemente de circuite interconectate la borne.

Un element de circuit este un domeniu ce are legătură electrică cu exteriorul doar printr-un număr finit de puncte numite borne. Un element se numeşte *dipolar* doar dacă are două borne.

Mărimile electrice ce caracterizează rețelele electrice sunt:

- *Intensitatea curentului electric* – mărime fizică scalară (pozitivă sau negativă) asociată unei secțiuni orientate printr-un conductor.
- *Tensiunea electrică* – mărime fizică scalară (pozitivă sau negativă) asociată unei perechi orientate de borne.

Pentru a marca faptul că aceste mărimi sunt orientate se utilizează săgeți atât pentru intensitate, cât şi pentru tensiune (numite sensuri de referință).

- Vom utiliza noțiunea de *nod* al circuitului pentru punctul în care se întâlnesc cel puțin trei conductoare.
- *Latura* va fi porțiunea de circuit cuprinsă între două noduri, iar *ochiul de circuit* este o succesiune continuă de laturi care formează un contur poligonal închis.

Relațiile fundamentale ale teoriei circuitelor în general şi a teoriei circuitelor electrice în particular sunt date de teoremele (relațiile) lui Kirchhoff.

Relația (teorema) întâi a lui Kirchhoff:

"*Suma algebrică a intensităților curenților ce concură la un nod al unui circuit electric este nulă*".

$$\sum_k I_k = 0 \qquad (1.1)$$

Caracterul algebric al sumei este impus de atribuirea semnului plus pentru curenții care ies din nodul *(n)* şi, respectiv, semnul minus pentru curenții care intră în acel nod.

Relația (teorema) a doua a lui Kirchhoff:

"*Suma tensiunilor electrice orientate în acelaşi sens pe un ochi este nulă*".

$$\sum_k U_k = 0 \qquad (1.2)$$

În cazul particular al unei bucle [b], cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff ia forma:

$$\sum_{k\in[b]} {}_{\mathcal{A}} R_k \cdot I_k + \sum_{k\in[b]} {}_{\mathcal{A}} U_{S_k} = \sum_{k\in[b]} {}_{\mathcal{A}} E_k \qquad (1.2')$$

Relație care arată ca suma algebrică a tensiunilor la bornele rezistoarelor şi surselor ideale de curent este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor ideale de tensiune.

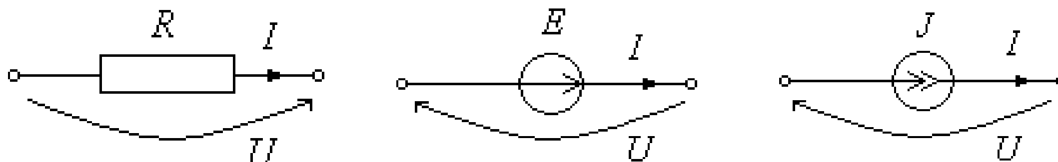
Caracterul algebric al celor trei sume din relația (1.2') este impus de necesitatea parcurgerii buclei [*b*] într-un anumit sens (arbitrar) şi atribuirea semnului plus tensiunilor $R_k \cdot I_k$ la bornele tuturor rezistoarelor de rezistențe R_k străbatute de curenții I_k în sensul de parcurgere, tensiunilor U_{S_k} (la bornele tuturor surselor de curent) al căror sens coincide cu sensul de parcurgere şi tensiunilor electromotoare E_k (ale tuturor surselor de tensiune) ale căror săgeți sunt orientate în sensul de parcurgere (respectiv minus în caz contrar).

Pentru rezolvarea rețelelor electrice (determinarea tensiunilor şi intensităților), la ecuațiile lui Kirchhoff sub forma generală se adaugă şi relațiile impuse tensiunii şi intensității de către fiecare element de circuit în parte.

Aceste relații (numite şi *ecuații de funcționare*) sunt specifice fiecărui element real.

Pentru a uşura studiul rețelelor electrice se introduc un număr de elemente cu proprietăți idealizate numite *elemente ideale*.

1. *Rezistorul* – simbolul acestui element şi ecuația sa de funcționare sunt date în Fig.1.1.
2. *Generatorul ideal de tensiune* – simbolul acestui element şi ecuația sa de funcționare sunt date în Fig.1. 2.
3. *Generatorul ideal de tensiune* – simbolul acestui element şi ecuația sa de funcționare sunt date în Fig.1. 3.



$U = RI$ $P = RI^2$ $U = E$ $P = EI$ $I = J$ $P = UJ$

Fig.1.1 Rezistorul ideal. Fig.1.2 Generatorul ideal de tensiune. Fig.1. 3 Generatorul ideal de curent.

Sursa ideală de tensiune (vezi figura 1.5-a) are ecuaţia de funcţionare

$$U = E \tag{1.3}$$

oricare ar fi valoarea şi sensul curentului I care o străbate. Cele două situaţii posibile pentru **sensul real al curentului care străbate sursa** (şi, corespunzător, pentru **sensul real al puterii transferate pe la borne**, sens evidenţiat cu ajutorul săgeţilor haşurate) sunt prezentate în fig. 1.1.4,b şi 1.1.4,c

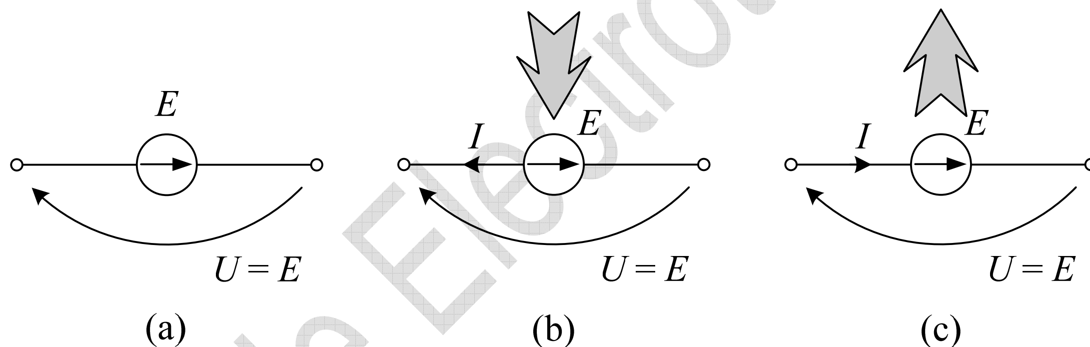


Fig. 1.4 Sursa ideală de tensiune sau generatorul ideal de tensiune.

Sursa ideală de curent (vezi figura 1.5,a) are ecuaţia de funcţionare:

$$I = I_s \tag{1.4}$$

oricare ar fi valoarea şi sensul tensiunii U_S la bornele sale. Cele două situaţii posibile pentru **sensul real al tensiunii la bornele sursei** (şi, corespunzător, pentru **sensul real al puterii transferate pe la borne**, sens evidenţiat şi de această dată cu ajutorul săgeţilor haşurate) sunt prezentate în figurile 1.5,b şi 1.5,c.

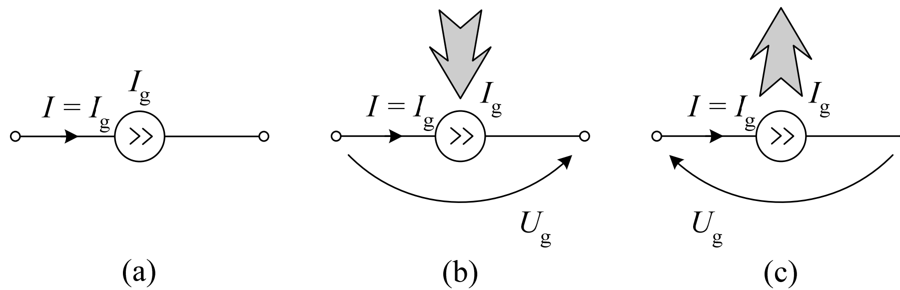
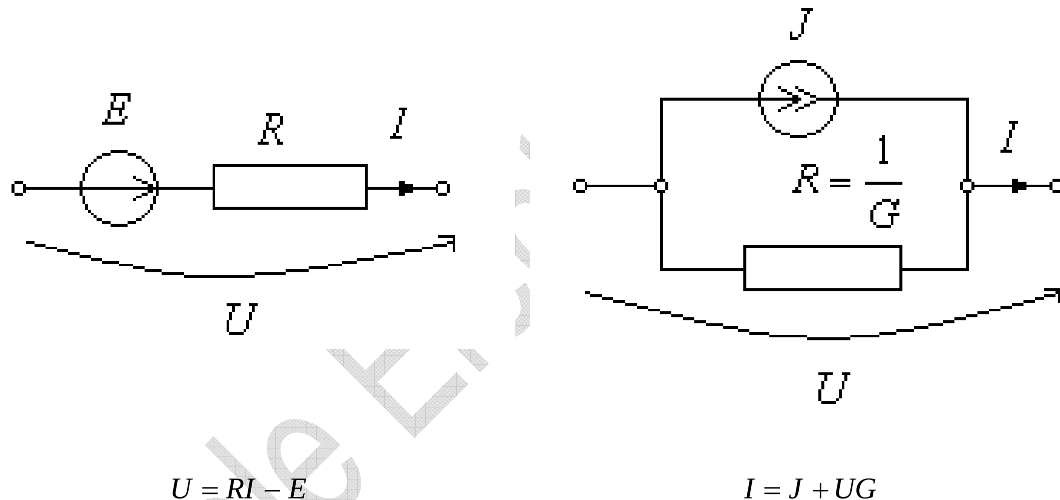


Fig. 1.5 Sursa ideală de curent sau generatorul ideal de curent.

În cazul generatoarelor reale de tensiune şi curent, descrise în Fig.1.6, ecuațiile de funcționare ale acestora se vor modifica în acord cu teoremele lui Kirchhoff:



$U = RI - E$ $\qquad$ $I = J + UG$

Fig.1. 6 Generatoarele reale de tensiune şi curent.

Din punct de vedere energetic, elementele de circuit sunt caracterizate cu ajutorul puterii transferate pe la borne, mărime ce se calculează la elementele dipolare cu ajutorul relației:

$$P = UI \tag{1.5}$$

Şi această mărime este orientată (poate fi absorbită sau cedată), interpretarea sensului efectuându-se cu ajutorul a două reguli:

a) **Regula de la receptoare** (la care tensiunea la borne şi curentul prin element au acelaşi sens).

Dacă $P > 0$ puterea P este absorbită.

Dacă $P < 0$, atunci puterea $|P|$ este cedată de elementul respectiv.

b) **Regula de la generatoare** (la care tensiunea la borne şi curentul prin element au sensuri opuse).

Dacă $P > 0$, puterea P este cedată.

Dacă $P < 0$, atunci puterea $|P|$ este absorbită de elementul respectiv.

Teorema conservării puterilor precizează că, pentru un circuit electric alcătuit din componente dipolare, *„suma puterilor algebrice primite la borne de elementele sale componente este egală cu zero”.*

$$\sum_k U_k I_k = 0 \tag{1.6}$$

În relația (1.6), sensul de referință pentru tensiunea U_k şi intensitatea curentului I_k este la fel orientat pentru fiecare element dipolar de circuit.

O consecință importantă a teoremei conservării puterilor o constituie Bilanțul puterilor care arată că *„suma puterilor consumate prin efect electrocaloric ireversibil (Joule) în rezistențele unui circuit electric complet este egală cu suma algebrică a puterilor cedate de sursele de energie electrică (sursele de tensiune şi injecțiile de curent)”.*

$$\sum_k R_k I_k^2 = \sum_k E_k I_k + \sum_k U_k J_k \tag{1.7}$$

Bilanțul puterilor este un instrument deosebit de util în verificarea rezolvării unui circuit electric. Dacă acesta este verificat din punct de vedere numeric, atunci valorile determinate pentru intensitățile curentului electric, respectiv tensiunile la bornele elementelor de circuit, sunt cele adevărate.

1.2 TEOREME DE ECHIVALENŢĂ PENTRU CIRCUITE DE CURENT CONTINUU

Vom spune că două elemente de circuit sunt echivalente dacă, având aceleaşi tensiuni (arbitrare) la borne, curenţii absorbiţi pe la borne sunt aceiaşi.

Remarcăm că într-o reţea putem substitui o parte de reţea (subreţea) cu un circuit echivalent, iar curenţii şi tensiunile în restul reţelei rămân nemodificaţi.

Această observaţie permite rezolvarea reţelelor reducându-le printr-o succesiune de echivalări la reţele mai simple.

1.2.1 TEOREMA DE ECHIVALENŢĂ DINTRE SURSA REALĂ DE TENSIUNE ŞI SURSA REALĂ DE CURENT

Această teoremă precizează că *o sursă reală de tensiune poate fi substituită de o sursă reală de curent şi reciproc, dacă avem următoarele relaţii între parametrii surselor de energie*:

$$J = \frac{E}{R} \qquad G = \frac{1}{R}$$

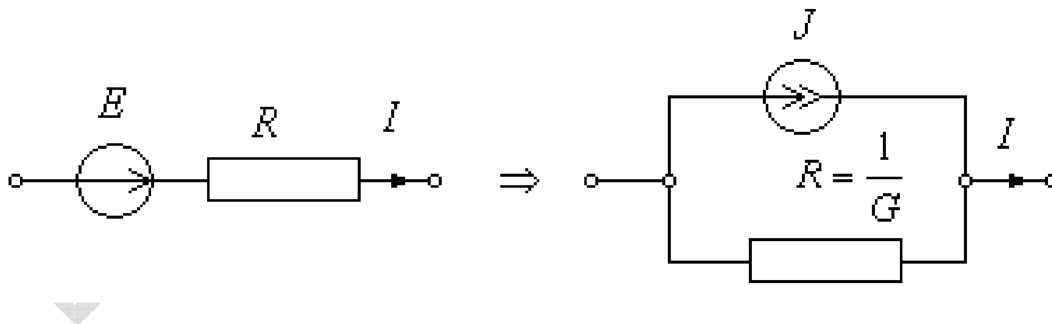


Fig.1. 7 .Echivalenţa dintre sursa reală de tensiune şi sursa reală de curent.

1.2.2 CONEXIUNEA SURSELOR REALE DE TENSIUNE

- Conexiunea serie

Spunem că mai multe surse de tensiune sunt conectate în serie dacă acestea sunt parcurse de aceeaşi valoare a intensităţii curentului electric.

În acest caz, relaţiile de echivalenţă sunt următoarele:

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k \qquad\qquad R = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

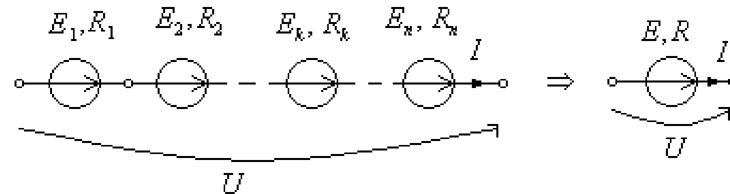


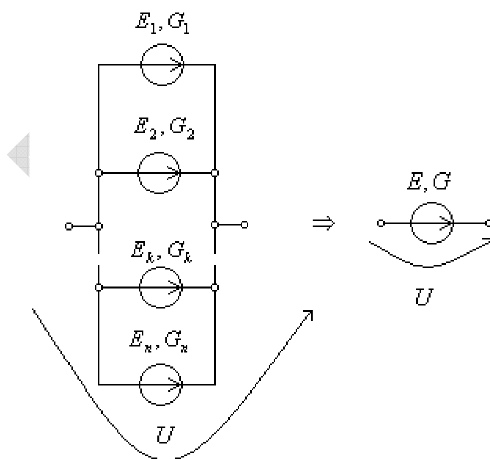
Fig.1.8 Surse de tensiune reale conectate în serie.

În Fig.1.8 nu s-a mai reprezentat şi simbolul de rezistenţă pentru fiecare sursă în parte şi nici pentru sursa echivalentă.

- <u>Conexiunea paralel</u>

Vom spune că mai multe surse reale sunt în paralel dacă la bornele acestora vom avea aceeaşi tensiune.

În această situaţie este mult mai comod de lucrat cu conductanţe (inversul rezistenţelor), iar relaţiile de echivalenţă vor deveni:



$$E = \frac{\sum_{k=1}^{n} G_k E_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$$

$$G = \sum_{k=1}^{n} G_k ; \quad \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

Fig. 1.9 Conexiunea paralel a surselor de tensiune.

1.2.2 CONEXIUNEA REZISTENŢELOR ELECTRICE

1. Conexiunea serie – Divizorul de tensiune.

Ca şi în cazul surselor de tensiune vom spune că un număr de rezistoare electrice sunt conectate în serie dacă acestea sunt parcurse de aceeaşi intensitate a curentului electric.

Relațiile de echivalență rezultă imediat din teorema a doua a lui Kirchhoff.

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

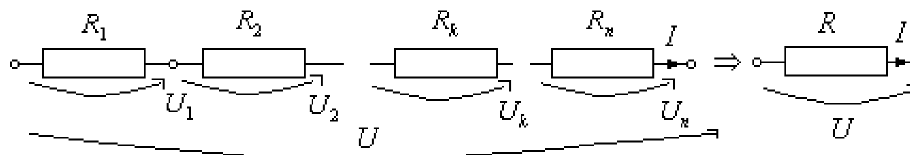
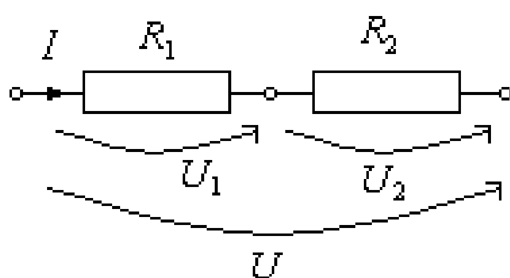


Fig.1. 10 Conectarea serie a rezistoarelor.

Divizorul de tensiune este compus din două rezistente electrice conectate în serie.

El prezintă o importanță practică în calculul direct al tensiunilor pentru cele două rezistențe dacă se cunoaşte tensiunea ce se aplică ansamblului format de cele două rezistoare.



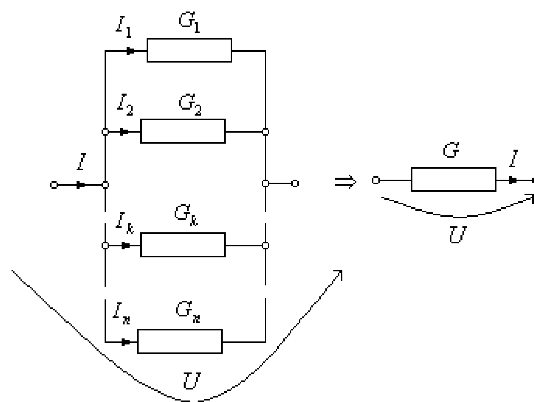
$$U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Fig.1.11 Divizorul de tensiune.

1. Conexiunea paralel – Divizorul de curent.

Rezistenţele vor fi conectate în paralel dacă acestea vor fi supuse la aceeaşi valoare a tensiunii. În acest caz relaţiile de echivalenţă pot fi scrise din nou mult mai uşor folosind conductanţele.



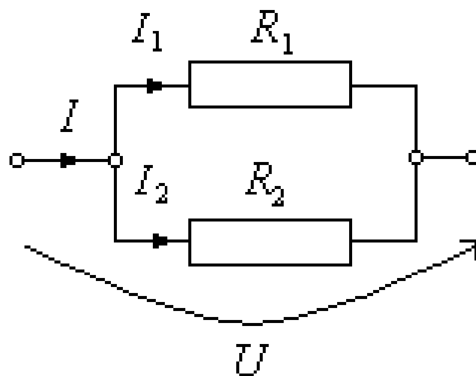
$$G = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

$$\frac{1}{R_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

Fig.1.12 Conectarea în paralel a rezistenţelor.

Divizorul de curent este compus din două rezistente conectate în paralel.

Din această configuraţie se poate determina, (folosind teoremele lui Kircchoff) în mod direct, curentul prin fiecare rezistor I_1, I_2, în funcţie de curentul de la intrarea în divizor I .



$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Fig.1.13 Divizorul de curent.

1.2.3 TRANSFIGURAREA STEA-TRIUNGHI

Deseori, pentru o simplificare a rezolvării circuitelor este util să se modifice schema de conexiune a unor rezistențe din conexiunea triunghi în conexiunea stea, sau invers.

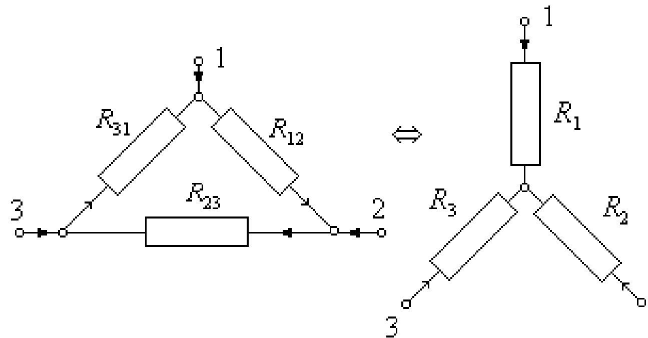


Fig1.14 .Transfigurarea stea - triunghi.

Relațiile de transfigurare, uşor de demonstrat în baza relațiilor lui Kircchhof, sunt:

Transfigurarea triunghi – stea Transfigurarea stea - triunghi

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1} \qquad (1.8)$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}$$

1.2.4 TEOREMA SUPERPOZIŢIEI – TEOREMELE LUI VASHY

”Intensitatea curentului electric prin orice latură a unei rețele **liniare şi active** (rețea conținând rezistoare liniare şi surse ideale de tensiune şi de curent) este suma algebrică a intensităților curenților pe care i-ar stabili în acea latură fiecare dintre surse dacă s-ar găsi doar ea în circuit, celelalte surse fiind **pasivizate**”.

Operaţiunea de pasivizare a unei surse constă în substituirea acesteia cu un rezistor având rezistenţa egală cu rezistenţa

internă a sursei. Întrucât rezistența internă a unei surse ideale de tensiune este zero, iar rezistența internă a unei surse ideale de curent este infinită, **operaţiunea de pasivizare a unei surse ideale de tensiune constă în substituirea acesteia cu un scurtcircuit, în timp ce operaţiunea de pasivizare a unei surse ideale de curent constă în substituirea acesteia cu un gol.**

Prin pasivizarea surselor de energie vom înțelege suprimarea acțiunii acestora în funcție de caracteristicile acestora, aşa cum sunt prezentate în Fig.1.15.

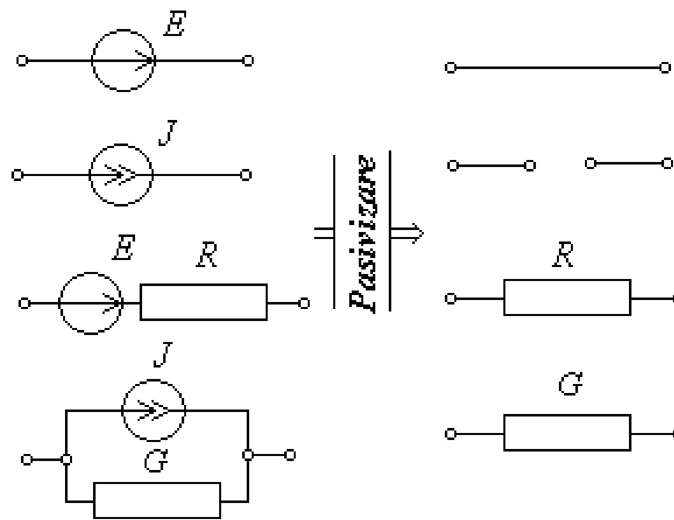


Fig.1.15 Pasivizarea elementelor de circuit.

Teorema lui Vashy pentru surse de tensiune (prima teoremă a lui Vashy): "Distribuția de curenți si de tensiuni pentru toate elementele dipolare ale unui circuit nu se modifică dacă se introduc în serie cu toate elementele conectate la un nod, oricare, al circuitului, surse ideale de tensiune având tensiuni electromotoare egale şi la fel orientate față de nodul respectiv."

Teorema lui Vashy pentru surse de curent (a doua teoremă a lui Vashy) : "Distribuția de curenți si de tensiuni pentru toate elementele dipolare ale unui circuit nu se modifică dacă se introduc în

paralel cu toate toate laturile ce alcătuiesc un ochi, oricare, al circuitului, surse ideale de curent injectând curenți egali şi la fel orientați în raport cu un sens arbitrar de parcurgere al ochiului respectiv.”

Subliniem însă faptul că prin utilizarea primei teoreme a lui Vashy **se modifică tensiunile laturilor** afectate de sursele ideale de tensiune nou introduse, iar prin utilizarea celei de-a doua teoreme a lui Vashy **se modifică curenţii laturilor** afectate de sursele ideale de curent nou introduse.

1.2.5 TEOREMELE SURSELOR ECHIVALENTE

- <u>Teorema lui Thevenin</u>

Un dipol liniar activ poate fi echivalat în raport cu bornele sale cu o sursă reală de tensiune având o tensiune electromotoare egală cu tensiunea la bornele dipolului de mers în gol şi o rezistență egală cu rezistența echivalentă a dipolului pasivizat în raport cu aceleaşi borne.

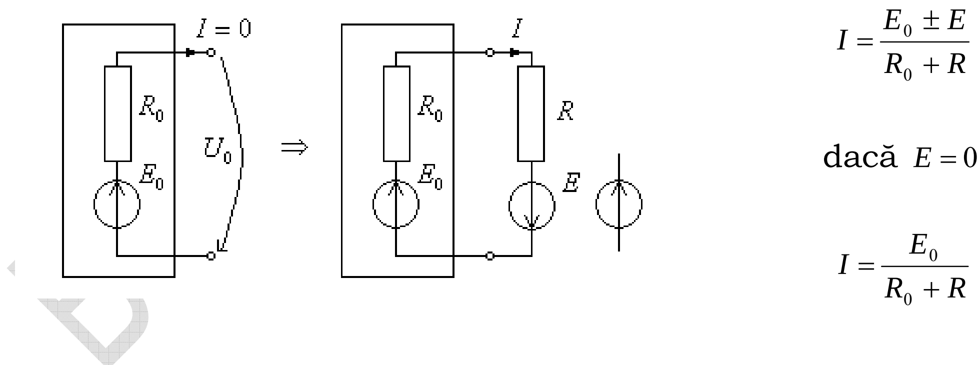
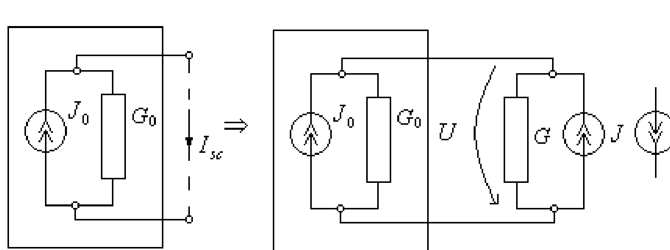


Fig.1.16 Teorema lui Thevenin.

O teoremă asemănătoare ce are acelaşi scop este *teorema lui Norton.*

- <u>Teorema lui Norton.</u>

Un dipol liniar activ poate fi echivalat în raport cu bornele sale cu o sursă reală de curent, de intensitate egală cu cea a curentului de scurt-circuit la bornele dipolului şi o conductanță egală cu conductanța echivalentă a dipolului pasivizat în raport cu bornele sale.



$$U = \frac{J_0 \pm J}{G_0 + G}$$

dacă $J = 0$

$$U = \frac{J_0}{G_0 + G}$$

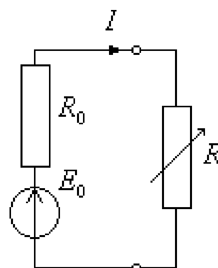
Fig.1.17. Teorema lui Norton.

Teoremele lui Thevenin şi Norton se aplică atunci când se urmăreşte determinarea intensității curentului sau a tensiunii la bornele unei singure laturi a unui circuit electric, eventual variația acestor mărimi odată cu parametrii laturii considerate, restul circuitului rămânând neschimbat.

1.2.6 TEOREMA TRANSFERULUI MAXIM DE PUTERE

Pentru un dipol activ, transferul maxim de putere de la acesta la o rezistență de sarcină R, se realizează în momentul în care valoarea rezistenței de sarcină este egală cu rezistența internă a dipolului R_0.

Spunem că sarcina exterioară este *adaptată* dipolului.



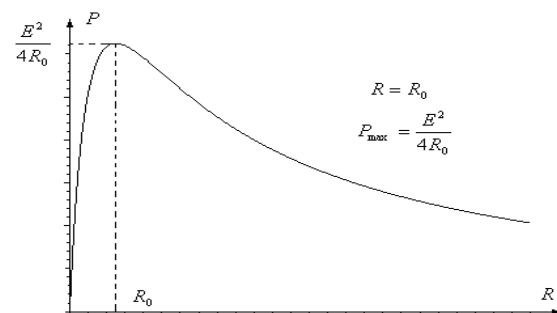


Fig.1.18 Teorema tranferului maxim de putere.

În acest caz, *randamentul transferului de putere* de la dipol la sarcină este :

$$\eta = \frac{P_{max}}{P_g} = \frac{R}{R + R_0} = \frac{R_0}{2R_0} = 0.5 \qquad (1.9)$$

Se observă că în acest caz randamentul transmisiei de putere este inadmisibil de mic.

Cu toate acestea, sunt aplicații în care se doreşte o sarcină adaptată sursei; acesta este cazul demarorului de pornire a autovehiculelor alimentate de la bateria de acumulatoare.

Este necesară transferarea unei puteri maxime pentru un timp relativ scurt, randamentul putând avea valori destul de mici.

1.3. METODE SISTEMATICE DE REZOLVARE A CIRCUITELOR DE CURENT CONTINUU

Metodele de rezolvare utilizate în paragraful anterior, bazate pe teoremele de echivalență (generatoare şi rezistențe echivalente) pot fi aplicate unor clase reduse de probleme (ce pot fi reduse prin grupări serie sau paralel la un singur ochi).

Metodele sistematice vor fi metode ce se pot aplica la orice tip de rețea şi permit calculul tuturor curenților şi tensiunilor din rețea.

Prin problema directă vom înțelege problema în care *datele problemei* sunt: *structura topologica a rețelei*, *parametrii elementelor de circuit din rețea*, E_k, J_k, R_k, iar *necunoscutele* vor fi *tensiunile* la bornele elementelor şi *curenții* prin acestea.

Pentru rezolvarea problemei directe se pot utiliza teoremele generale ale lui Kirchhoff, completate cu relațiile de funcționare (relațiile dintre tensiune şi curent) pentru fiecare element.

Metoda ecuaţiilor lui Kirchhoff presupune scrierea a *N-1* ecuaţii din teorema întâia (*N* fiind numărul de noduri), iar a *L-N+1* ecuaţii date de a doua teoremă (*L* fiind numărul de laturi).

Rezultă astfel un sistem compatibil determinat ce are ca necunoscute curenţii prin laturile circuitului.

Metoda ecuaţiilor Kirchhoff

Aceasta metodă prezintă următorul algoritm:

1. Se aleg sensurile de referinţă şi se aleg cei *L* curenţi din reţea. Se aleg sensurile de referinţă şi se notează tensiunile la bornele generatoarelor ideale de curent.
2. Se scrie prima teoremă a lui Kirchhoff de *N-1* ori pentru *N-1* noduri.

$$\sum_k I_k = 0 \qquad (1.10)$$

În relaţia (1.10), suma este considerată algebrică (se trec cu plus curenţii care ies şi cu minus curenţii care intră în nod).

3. Se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pe *L-N+1* ochiuri independente pentru care s-au marcat în prealabil sensurile de parcurs:

$$\sum_k R_k I_k + \sum_k U_k = \sum_k E_k \qquad (1.11)$$

În relaţia (1.11) toate cele trei sume sunt algebrice (termenii se trec cu minus dacă sensul de parcurs este opus sensului lui I_k, U_k sau E_k).

Pentru a scrie o ecuaţie pe un ochi trebuie să-l parcurgem de două ori prima dată, să urmărim rezistoarele, generatoarele ideale de curent

şi tensiunile la borne, iar a doua oară numai generatoarele ideale de tensiune.

Ochiurile pe care scriem aceste ecuații sunt de preferabil alese astfel încât să aibă un număr minim de rezistoare.

4. Se rezolvă sistemul format din L ecuații cu L necunoscute (curenții prin laturi şi tensiunile la bornele generatoarelor ideale de curent) cu una din metodele matematice cunoscute de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare (substituție, reducere, determinanți sau prin inversare de matrici).
5. Se verifică rezultatele obținute prin verificarea teoremelor lui Kirchhoff în nodul în care nu a fost utilizat sau pe alte ochiuri neutilizate.
6. Se verifică bilanțul puterilor pe rețea cu relația:

$$\sum_{k=1}^{n1} R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{n2} E_k I_k + \sum_{k=1}^{n3} U_k J_k \qquad (1.12)$$

În relația (1.12), suma din stânga este aritmetică ($n1$-numărul de rezistoare), sumele din dreapta sunt algebrice ($E_k I_k$ se trec cu minus doar dacă E_k şi I_k au semne opuse, iar $U_k J_k$ se trece cu semnul minus doar dacă U_k şi J_k au sensuri de referință similare)

Metoda curenților ciclici

O alta metodă sistematică de rezolvare a circuitelor de curent continuu este metoda curenților ciclici.

Pentru rezolvarea unei probleme directe cu ajutorul acestei metode se parcurg următoarele etape:

1. Se numără nodurile (două noduri unite printr-un conductor le vom numi “pseudo-noduri” şi le vom considera ca alcătuind un singur

nod). Se numără laturile. Se calculează numărul de ochiuri fundamentale cu relația $O = L - N + 1$.

2. Se aleg O ochiuri independente care se consideră parcurse de curenți ciclici marcându-se pe figură sensurile de referință şi valorile acestor curenți. Dacă problema conține generatoare ideale de curent se aleg ochiurile astfel încât fiecare curent ciclic să nu parcurgă decât maxim un singur generator de curent.
3. Se scriu O ecuații liniare sub forma standard:

$$\begin{cases} R_{11}I_1^{'} + R_{12}I_{21}^{'} + \cdots R_{10}I_0^{'} = E_1^{'} \\ R_{21}I_1^{'} + R_{22}I_{21}^{'} + \cdots R_{20}I_0^{'} = E_2^{'} \\ \vdots \\ R_{01}I_1^{'} + R_{02}I_{21}^{'} + \cdots R_{00}I_0^{'} = E_0^{'} \end{cases} \quad (1.13)$$

4. Se calculează R_{ii} (elementele de pe diagonala sistemului) ca suma aritmetică a rezistențelor de pe ochiul i. Dacă pe ochiul i se afla un generator ideal de curent atunci $R_{ii} = \infty$, deci ecuația i nu are sens şi ea se elimină din sistem. Se calculează apoi $R_{ij} = R_{ji}$, ca fiind rezistența laturilor comune i cu ochiul j; ea se trece cu plus dacă cei doi curenți ciclici au acelaşi sens şi cu minus dacă au sensuri opuse prin latura comună.
5. Se calculează tensiunile $E_i^{'}$ ca suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale generatoarelor ideale de tensiune pe ochiul i (la fel ca membrul drept din metoda ecuațiilor lui Kirchhoff).
6. Se completează sistemul obținut cu valorile curenților ciclici ce trec prin generatoarele ideale de curent (care sunt tocmai curenții de scurt-circuit ai generatoarelor).
7. Sistemul astfel obținut se rezolvă cu una din metodele cunoscute în matematică.

8. Se aleg sensurile de referință ale curenților din laturi şi se calculează aceşti curenți ca sume algebrice de curenți ciclici.
9. Se calculează tensiunea la bornele elementelor aplicând ecuațiile de funcționare sau teorema a doua a lui Kirchhoff.
10. Verificările ce se pot face se bazează pe teorema a doua a lui Kirchhoff, sau bilanțul puterilor.

Metoda potențialelor la noduri

Această metodă presupune următoarele etape:

1. Se urmăresc laturile rețelei ce conțin numai generatoare ideale de tensiune (laturi de rezistență nulă). Unul din nodurile rețelei (de preferință cel în care converg cele mai multe laturi de rezistență nulă), se alege ca nod de referință (de potențial nul). Laturile de rezistență nulă care nu converg în nodul de referință se pasivizează cu ajutorul teoremei lui Vaschy, pentru generatoarele de tensiune obținându-se o rețea echivalentă din punct de vedere al curenților cu rețeaua inițială.

2. Se numără nodurile şi se numerotează potențialele lor (pseudo-nodurile se vor considera ca un singur nod): $V_0, V_1 \cdots V_{n-1}$.
3. Se scriu $n-1$ ecuații liniare sub forma standard:

$$\begin{cases} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \cdots G_{1n-1}V_{n-1} = I_{sc1} \\ G_{12}V_1 + G_{22}V_2 + \cdots G_{21n-1}V_{n-1} = I_{sc2} \\ \vdots \\ G_{n-11}V_1 + G_{n-12}V_2 + \cdots G_{n-1n-1}V_{n-1} = I_{scn-1} \end{cases} \quad (1.14)$$

4. Se calculează G_{ii} (elementele de pe diagonala sistemului) ca suma aritmetică a conductanțelor laturilor ce concură la nodul i. Dacă între aceste laturi este una de rezistență nulă $G_{ii} = \infty$, ecuația

respectivă se elimină din sistem ca fiind lipsită de sens. Se calculează apoi $G_{ij} = G_{ji}$ ca fiind suma aritmetică a conductanțelor laturilor ce leagă nodul i cu nodul j luată cu sens schimbat.

5. Se calculează "injecțiile" de curent în noduri I_{sci}, ca suma algebrică a curenților de scurt-circuit ai laturilor ce concură în nodul i. Curenții de scurt-circuit ai laturilor se calculează eliminând latura respectivă din circuit şi unind bornele ei extreme. Aceşti curenți se trec cu plus dacă săgeata generatorului înțeapă (injectează) nodul şi cu minus dacă pleacă din nod.
6. Se completează sistemul obținut cu valorile potențialelor de la extremitățile laturilor de rezistență nulă (ele sunt $\pm$tensiunile electromotoare ale generatoarelor ideale de tensiune de pe acele laturi).
7. Sistemul obținut se rezolvă cu una din metodele cunoscute din matematică.
8. Se aleg sensurile de referință ale curenților din laturi şi ale tensiunilor la bornele laturilor, făcându-se notațiile corespunzătoare.
9. Se calculează tensiunile la bornele laturilor ca diferențe de potențial.
10. Se calculează intensitățile curenților prin laturi aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul format de latură şi sensul de referință al tensiunii.
11. Se calculează tensiunile din rețeaua inițială utilizând teorema a doua a lui Kirchhoff.
12. Se verifică rezultatele obținute cu ajutorul teoremei întâi a lui Kirchhoff şi prin bilanțul puterilor.

Rezolvarea circuitelor prin teorema lui Thevenin şi Norton

Teorema lui Thevenin permite calculul intensității curentului într-o singură latură din circuit.

Pentru aplicarea acesteia trebuie parcurse următoarele etape:

1. Se aleg bornele A şi B de pe latura în care ne interesează curentul astfel încât între ele să nu se afle nici un generator (la extremitățile unui rezistor R_{AB} sau de-a lungul unui conductor $R_{AB}=0$).
2. Se pasivizează rețeaua înlocuindu-se generatoarele cu rezistențele lor interne (generatoarele ideale de tensiune cu $R=0$, şi generatoarele ideale de curent cu $R=\infty$). Se elimină rezistența dintre bornele A şi B. Pentru rețeaua astfel obținută se calculează rezistența R_{AB0}, rezistența echivalentă între bornele A şi B.
3. În rețeaua nepasivizată se elimină rezistența dintre bornele A şi B şi se calculează tensiunea între aceste puncte (tensiunea de mers în gol U_{AB0}). Această tensiune se calculează cu una din metodele prezentate anterior (avantajul metodei Thevenin este că rețeaua ce trebuie rezolvată la acest punct este mai simplă decât cea inițială având o latură mai puțin).

4. Se calculează intensitatea $I_{AB}=\dfrac{U_{AB0}}{R_{AB0}+R_{AB}}$ şi tensiunea $U_{AB}=R_{AB}I_{AB}$.

O altă metodă de calcul a unei singure mărimi (tensiune de astă data) este *teorema lui Norton*. Pentru aplicarea acestei metode trebuie parcurse următoarele etape:

1. Se aleg bornele A şi B astfel încât între ele să se afle doar un rezistor (chiar de conductanță nulă).
2. Se calculează conductanța echivalentă a rețelei pasivizate (pasivizarea se face ca şi la metoda Thevenin):

$$G_{AB0}=\frac{1}{R_{AB0}}$$

3. În rețeaua inițială se scurt-circuitează punctele AB şi se calculează intensitatea curentului ce parcurge conductorul de scurt-circuit I_{scAB}. Calculul acestui curent se face cu una din metodele prezentate anterior. (Este remarcabil că rețeaua de rezolvat la acest punct are o latură mai puțin decât rețeaua inițială, lucru ce simplifică în unele cazuri foarte mult rețeaua).

4. Se calculează tensiunea între bornele A şi B cu ajutorul rețelei $U_{AB} = \dfrac{I_{scAB}}{G_{AB0} + G_{AB}}$ şi intensitatea $I_{AB} = U_{AB} G_{AB}$.

Metoda superpoziției

Este o metodă de rezolvare a circuitelor electrice valabilă pentru circuitele liniare şi se poate sublima în următoarea afirmație:

"Intensitatea curentului electric din orice latură a unei rețele electrice liniare este suma algebrică a intensităților curenților pe care i-ar stabili în acea latură fiecare dintre sursele independente dacă s-ar găsi singură în rețea".

Trebuie spus că suprimarea acțiunii celorlalte surse de energie din circuit se face prin pasivizare (Fig.13).

Mai trebuie menționat că trebuie ținută seama de semnul fiecărui curent ales prin latura în care dorim să determinăm intensitatea curentului.

1.4 SURSE COMANDATE

Sursele comandate sunt acele surse la care mărimile furnizate de acestea **depind** (**sunt comandate**) de alte mărimi – curenți sau tensiuni – din circuit.

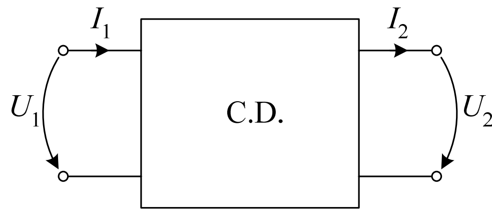


Fig. 1.19

Din acest motiv o sursă comandată admite ca model un multipol cu patru borne de acces, numit **cuadripol diport** (notat CD în figura 1.19). Cele patru borne sunt grupate în două porţi: **poarta de intrare**, la care mărimile la borne U_1 şi I_1 sunt asociate ca sensuri de referinţă conform convenţiei de la receptoare, şi **poarta de ieşire**, la care mărimile la borne U_2 şi I_2 sunt asociate ca sensuri de referinţă conform convenţiei de la generatoare.

După cum poarta de intrare este un scurtcircuit (U_1 = 0) sau un gol (I_1 = 0), iar poarta de ieşire este un generator ideal de tensiune sau un generator ideal de curent, sursele comandate se clasifică în următoarele patru categorii (vezi figura 1.20):

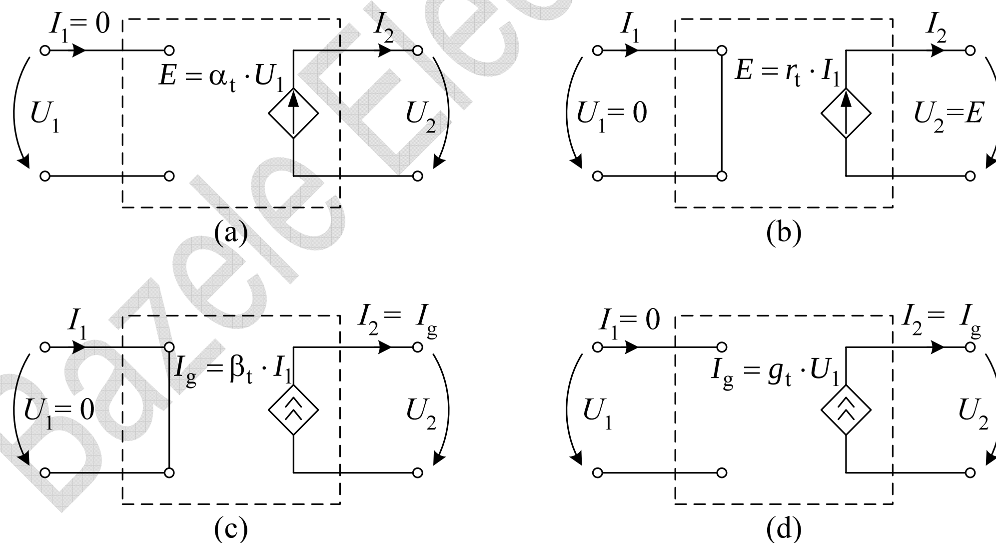


Fig. 1.20

(a) **Sursa de tensiune comandată în tensiune**, care are ecuaţiile de funcţionare

$$U_2 = E = \alpha_t \cdot U_1;\ I_1 = 0 \tag{1.15}$$

(b) **Sursa de tensiune comandată în curent**, care are ecuațiile de funcționare

$$U_2 = E = r_t \cdot I_1;\ U_1 = 0 \tag{1.16}$$

(c) **Sursa de curent comandată în curent**, care are ecuațiile de funcționare

$$I_2 = I_s = \beta \cdot I_1;\ U_1 = 0 \tag{1.17}$$

(d) **Sursa de curent comandată în tensiune**, care are ecuațiile de funcționare

$$I_2 = I_s = g_t \cdot U_1;\ I_1 = 0 \tag{1.18}$$

Constantele α_t, r_t, β_t şi g_t sunt **mărimi de transfer între poarta de intrare şi poarta de ieşire** şi au următoarele semnificații:

- $\alpha_t = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_1=0}$ se numeşte **factor** (adimensional) **de transfer în tensiune**
- $r_t = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{U_1=0}$ se numeşte **rezistență de transfer**
- $\beta_t = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_1=0}$ se numeşte **factor** (adimensional) **de transfer în curent**
- $g_t = \left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{I_1=0}$ se numeşte **conductanță de transfer**.

Sunt de reținut următoarele chestiuni în legătură cu sursele comandate:

- Sursele comandate sunt surse ideale;

- Sursele comandate modelează existența unor fenomene de cuplaj electromagnetic între mărimile ce caracterizează poarta de intrare şi mărimile ce caracterizează poarta de ieşire, care pot conduce la scheme echivalente rezistive neconexe;

- Rezolvarea circuitelor cu surse comandate cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff, metodei curenților ciclici şi metodei potențialelor nodurilor se face la fel ca în cazul în care nu există surse comandate. Ecuațiilor corespunzătoare fiecărei metode li se adaugă relațiile care exprimă mărimile care comandă în funcție de necunoscutele metodei, iar apoi aceste relații se înlocuiesc în expresiile surselor comandate.

În acest fel, în cazul rezolvării circuitelor cu surse comandate cu ajutorul metodei curenților ciclici sau a metodei potențialelor nodurilor, **matricile coeficienţilor necunoscutelor nu vor mai fi simetrice după rescrierea ecuaţiilor**.

- Generatoarele comandate se comportă diferit față de generatoarele independente referitor la teoremele Thévenin, Norton şi superpoziției, în sensul că **sursele comandate nu se pasivizează** întrucât ele nu pot exista în absența unei mărimi (curent sau tensiune) de comandă.

- Calculul parametrilor R_{AB_0} şi G_{AB_0} (necesari în teoremele generatoarelor echivalente) se poate face prin una din următoarele metode:

– Se determină mai întâi mărimile $U_{AB_{\text{gol}}}$ şi $I_{AB_{\text{sc}}}$, iar apoi se calculează R_{AB_0} şi, respectiv, G_{AB_0} cu relațiile

$$R_{AB_0}=\frac{U_{AB_{\text{gol}}}}{I_{AB_{\text{sc}}}};\qquad G_{AB_0}=\frac{1}{R_{AB_0}}=\frac{I_{AB_{\text{sc}}}}{U_{AB_{\text{gol}}}} \tag{1.19}$$

– Se utilizează metoda de determinare a rezistenței (conductanței) de intrare a unui circuit electric **fără a pasiviza sursele comandate**.

Atragem atenția că, pentru circuitele care conțin generatoare comandate, **mărimile R_{AB_0} şi G_{AB_0} pot rezulta şi negative**.

• În cazul rețelelor cu generatoare comandate, teorema superpoziției afirmă că un curent printr-o latură, oricare, a unui circuit liniar este suma algebrică a curenților pe care îi stabileşte în acea latură fiecare dintre sursele independente, **dar de fiecare dată în prezența surselor comandate** (care nu se pasivizează).

2.
REGIMUL PERMANENT SINUSOIDAL AL CIRCUITELOR ELECTRICE

2.1 MĂRIMI SINUSOIDALE –CARACTERIZARE, REPREZENTARE SIMBOLICĂ

Prin definiție, o mărime sinusoidală este marimea a cărei variație în timp este descrisă de o expresie de forma:

$$x(t) = X_{\max}\sin(\omega t + \varphi) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \qquad (2.1)$$

În relația (2.1) mărimile care apar au următoarea semnificație:

- $X_{\max}$ – este *amplitudinea* sau valoarea de vârf a mărimii sinusoidale şi reprezintă valoarea maximă pozitivă a variației *x(t)* în decursul unei perioade.
- X – este *valoarea efectivă* sau eficace a mărimii sinusoidale. Între amplitudine şi aceasta există, aşa cum se observă din

relația (2.1), dependența: $X_{\max} = X\sqrt{2}$. Valoarea efectivă X este valoarea indicată de aparatele de măsură.

- ω – este *pulsația* sau frecvența unghiulară. Între pulsație şi frecvența (sau perioada) mărimii există relația:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{2.2}$$

- $\alpha=\omega t + \varphi$ – reprezintă faza la un moment dat (t oarecare). Pentru t=0 se obține faza inițială φ a mărimii sinusoidale.

Pentru a ilustra mai bine semnificația fizică a acestor mărimi vom reprezenta grafic variația în timp pentru o mărime sinusoidală:

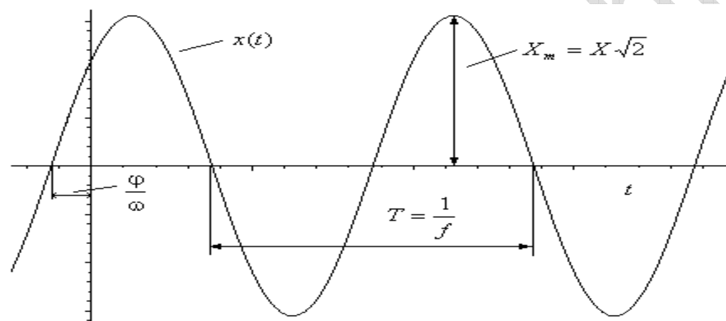


Fig.2.1 Mărimi şi valori caracteristice unei variații sinusoidale.

Prin definiție, <u>*valoarea medie*</u> a unei mărimi periodice este valoarea expresiei dată de relația (2.2).

$$\langle x\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{d}\,t = 0 \tag{2.3}$$

Aşa cum se poate observa din relația (2.3) pentru o mărime sinusoidală valoarea sa medie este nulă.

O mărime periodică de valoare medie nulă se numeşte *mărime alternativă.*

Definim <u>*valoarea efectivă*</u> sau eficace a mărimii - rădăcina pătrată a valorii medii a pătratului variației respective.

$$X = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t)\,\mathrm{d}t} = \frac{X_{max}}{\sqrt{2}} \tag{2.4}$$

Pentru două mărimi sinusoidale de aceeaşi pulsație ω se defineşte ***defazajul*** φ ca diferența dintre fazele celor două mărimi sinusoidale – de fapt diferența dintre fazele lor inițiale.

$$x_1(t) = X_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1) \qquad \varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{2.5}$$
$$x_2(t) = X_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$$

În Fig. 2.2 se vizualizează defazajul pentru două mărimi de amplitudini şi faze inițiale diferite:

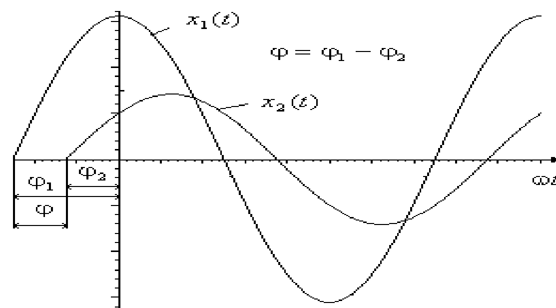


Fig. 2.2 Defazajul dintre două mărimi sinusoidale.

2.2 REPREZENTAREA COMPLEXĂ A MĂRIMILOR SINUSOIDALE

Pentru orice mărime sinusoidală *x(t)* de pulsație ω i se poate asocia în mod biunivoc un număr complex $\underline{X}$ numit şi complexul sau *imaginea complexă* a lui *x(t)*, de modul egal cu valoarea efectivă şi de argument egal cu faza inițială a mărimii sinusoidale:

$$x(t) = X\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \underline{X} = X\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = X(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \tag{2.6}$$

În relația (2.6) s-a notat $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$ fiind numărul complex de modul unitate şi faza $\pi/2$. Acest mod de reprezentare analitică a mărimilor sinusoidale se numeşte reprezentare complexă. Acest tip de

reprezentare permite şi o reprezentare în planul complex a mărimilor sinusoidale:

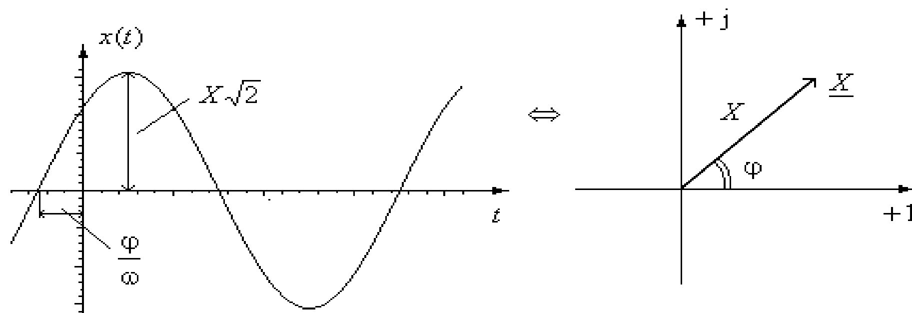


Fig.2.3 Reprezentarea complexă a mărimilor sinusoidale.

Această reprezentare este foarte utilă deoarece permite rezolvarea circuitelor electrice de curent alternativ sinusoidal mult mai uşor şi permite totodată o mai bună interpretare a rezultatelor obținute.

Prin urmare, în prima fază, mărimile sinusoidale vor fi exprimate cu ajutorul numerelor complexe, apoi, după rezolvarea acestora, folosind în principal aceleaşi teoreme de echivalență şi metode de rezolvare ca şi în curent continuu, se va reveni în domeniul timp folosind biunivocitatea transformării în complex.

2.3 ELEMENTE DE CIRCUIT

Elemente pasive de circuit

În principal, aceste elemente de circuit sunt reprezentate de rezistorul, bobina, condensatorul şi bobinele cuplate mutual între ele, fiecare dintre acestea fiind caracterizate doar de un singur parametru constant, rezistența *R*, inductivitatea *L*, capacitatea *C*, respectiv inductivitatea mutuala de cuplaj *M*, care apare în plus fața de parametrii celor două bobine cuplate între ele.

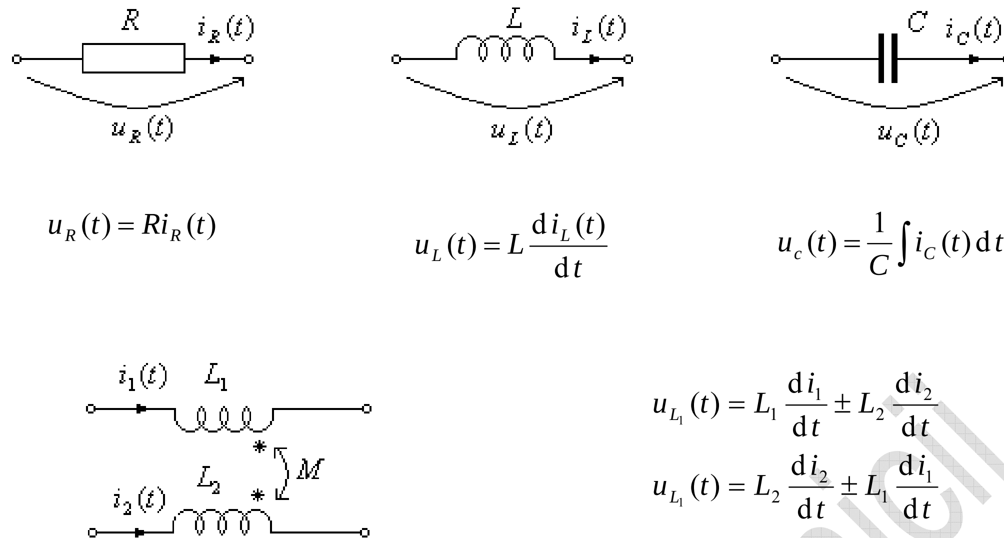


Fig.2.4 Elementele pasive de circuit

În Fig.2.4 s-au prezentat pentru fiecare element în parte ecuațiile analitice ce le caracterizează.

În cazul bobinelor cuplate magnetic semnul dintre cei doi termeni este + dacă i_1 şi i_2 au acelaşi sens fața de bornele polarizate, iar semnul este – dacă i_1 intră în borna polarizată, iar i_2 iese din borna polarizată sau invers.

Aşa cum este sensul curenților şi poziția bornelor marcate în figură semnul este pozitiv.

Elementele active de circuit

Aceste elemente sunt generatorul ideal de tensiune şi generatorul ideal de curent.

Generatorul ideal de tensiune se caracterizează prin faptul că indiferent de valoarea intensității curentului care-l parcurge *i(t)*, acesta furnizează la bornele sale o tensiune constantă *u(t)* egală cu valoarea tensiunii generatorului *e(t)*.

Generatorul ideal de curent se caracterizează prin faptul că indiferent de valoarea tensiunii de la bornele sale *u(t)* acesta injectează în circuit un curent a cărui intensitate constantă *i(t)* este egală cu valoarea curentului generatorului *j(t)*.

În Fig 2.5 sunt ilustrate simbolurile şi ecuaţiile de funcţionare ale generatoarelor ideale de tensiune şi curent.

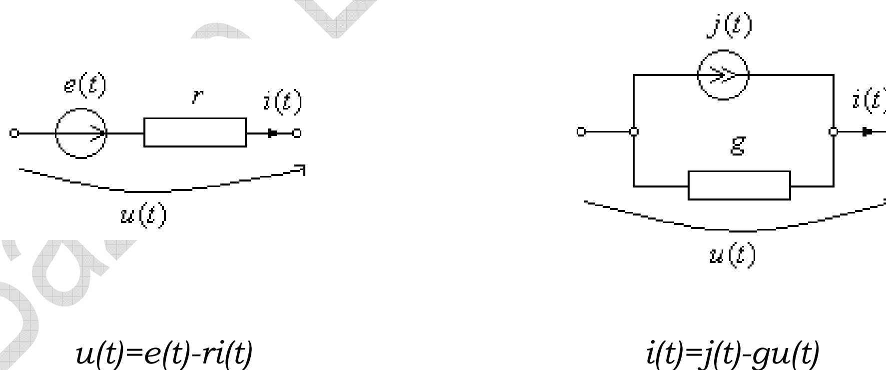


u(t)=e(t) *i(t)=j(t)*

Fig.2.5 Generatoarele ideale de tensiune şi curent.

În cazul generatoarelor reale de tensiune şi curent în componenta acestora mai avem o rezistenţa interioară în serie cu generatorul de tensiune şi în paralel cu generatorul de curent.

În Fig.2.6 sunt reprezentate schemele echivalente ale acestor generatoare precum şi ecuaţiile lor de funcţionare.



u(t)=e(t)-ri(t) *i(t)=j(t)-gu(t)*

Fig. 2.6 Generatoarele reale de tensiune şi curent.

În circuitele electrice este de multe ori util să lucrăm un un singur tip de generator.

De aceea, este util să putem trece de la un tip de generator la celălalt.

Ecuațiile de transformare se pot obține uşor prin compararea expresiei tensiunii *u(t)* pentru cele două tipuri de generatoare:

$$\begin{cases} u(t) = e(t) - ri(t) \\ u(t) = rj(t) - ri(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e(t) = ri(t) \\ j(t) = \dfrac{e(t)}{r} \end{cases} \quad g = \frac{1}{r} \tag{2.7}$$

Prima din relațiile rezultate se foloseşte la trecerea de la generatorul de curent la cel de tensiune, cu legarea rezistenței interioare în serie, iar a doua relație permite trecerea de la generatorul de tensiune la cel de curent cu legarea rezistenței interioare în paralel cu generatorul.

2.4. IMITANȚE COMPLEXE

Rezolvarea circuitelor electrice de curent alternativ periodic sinusoidal se poate face sistematizat apelând la noțiunile de *impedanță* respectiv *admitanță* complexă denumite în termenul comun de *imitanțe complexe*.

Pentru aceasta vom considera un dipol liniar şi pasiv ale cărui elmente inductive componente nu au cuplaje magnetice cu exteriorul.

Tensiunea şi curentul la bornele sale au o variație sinusoidală Fig.2.7.

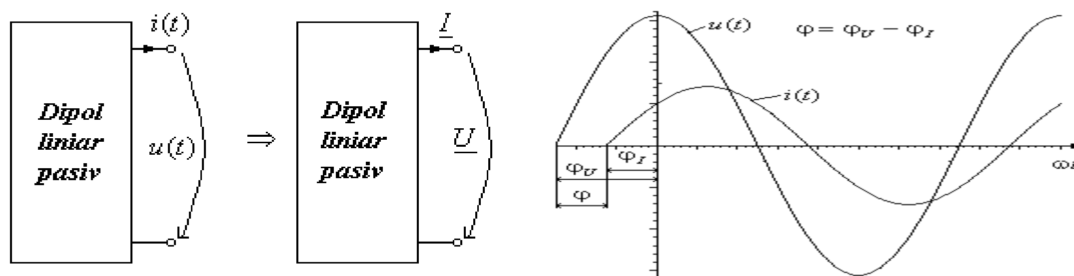


Fig.2.7 Dipol liniar pasiv necuplat magnetic cu exteriorul.

Variația în timp a tensiunii şi a curentului la bornele dipolului:

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_U) \qquad \underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_U} = U(\cos\varphi_U + \mathrm{j}\sin\varphi_U)$$
$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_I) \qquad \underline{I} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_I} = I(\cos\varphi_I + j\sin\varphi_I) \qquad (2.8)$$

Prin definiţie se numeşte *impedanţa complexă* a dipolului raportul dintre imaginile complexe ale tensiunii aplicate la bornele sale şi intensitatea curentului absorbit:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_U - \varphi_I)} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = Z(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = R + \mathrm{j}\,X \qquad (2.9)$$

Modulul Z [Ω] se numeşte impedanţa reală a dipolului şi argumentul său $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ se numeşte faza dipolului iar:

$$R = \Re e\{\underline{Z}\} = Z\cos\varphi \quad - \quad \text{rezistenta interna echivalenta a dipolului}\,[\Omega]$$
$$X = \Im m\{\underline{Z}\} = Z\sin\varphi \quad - \quad \text{reactanta interna echivalenta a dipolului}\,[\Omega] \qquad (2.10)$$

În mod evident se pot determina relaţiile:

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{X}{R} \qquad (2.11)$$

Prin definiţie Y [S] se numeste *admitanţa complexă* a dipolului raportul dintre imaginile complexe ale intensităţii curentului şi ale tensiunii la bornele sale:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I}{U}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\varphi_U - \varphi_I)} = Y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = Y(\cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi) = G - \mathrm{j}\,B \qquad (2.12)$$

În relaţia (2.12) se identifică G – conductanţa echivalentă şi B – susceptanţa echivalentă ca parte reală respectiv, coeficient schimbat de semn al părtii imaginare din $\underline{Y}$.

$$G = \Re e\{\underline{Y}\} = Y\cos\varphi \quad - \quad \text{conductanta interna echivalenta a dipolului}\,[\mathrm{S}]$$
$$B = \Im m\{\underline{Y}\} = Y\sin\varphi \quad - \quad \text{susceptanta interna echivalenta a dipolului}\,[\mathrm{S}] \qquad (2.13)$$

Ca şi în cazul impedanţei pentru admitanţă avem relaţiile:

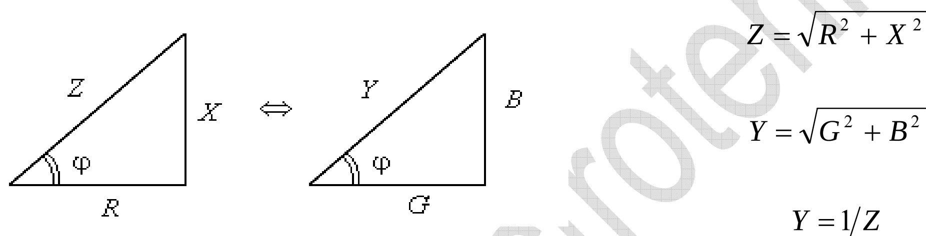
$$Y = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + B^2} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{B}{G} \qquad (2.14)$$

Observăm că admitanța (reală sau complexă) constituie inversul impedanței (reale sau complexe).

Prin urmare între parametrii arătați mai sus se pot determina o serie de relații:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \qquad R = \frac{G}{Y^2} = GZ^2 \qquad X = \frac{B}{Y^2} = BZ^2$$
$$Y = \frac{1}{Z} \qquad G = \frac{R}{Z^2} = RY^2 \qquad B = \frac{X}{Z^2} = XY^2 \qquad (2.15)$$

Având în vedere relațiile (2.11) şi (2.14) observăm că este posibilă construirea a două triunghiuri dreptunghice numite generic al impedanțelor respectiv, al admitanțelor (Fig.2.8).



$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$Y = 1/Z$$

Fig.2.8 Triunghiurile imitanțelor

Mai trebuie precizat că dipolul liniar şi pasiv necuplat cu exteriorul trebuie în mod obligatoriu să satisfacă condiția:

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \qquad (2.16)$$

Condiția (2.15) este echivalentă cu $\Re e\{\underline{Z}\} = R \geq 0$.

Dacă $\Im m\{\underline{Z}\} > 0$ sau $\varphi > 0$ vom spune că avem un regim preponderent inductiv.

În acest caz putem echivala întreg dipolul fie serie fie paralel (după cum lucrăm în impedanță sau admitanță) cu un rezistor în conexiune cu o inductivitate.

La legarea serie La legarea paralel (2.17)

$$R = \Re e\{\underline{Z}\} \qquad G = \Re e\{\underline{Y}\}$$

$$X_L = \Im m\{\underline{Z}\} \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} \qquad B_L = \Im m\{\underline{Y}\} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega B_L}$$

Dacă $\Im m\{\underline{Z}\} < 0$ sau $\varphi < 0$ vom spune că avem un regim preponderent capacitiv.

În acest caz putem echivala întreg dipolul fie serie fie paralel (după cum lucrăm în impedanță sau admitanță) cu un rezistor în conexiune cu o capacitate.

La legarea serie   La legarea paralel

$$R = \Re e\{\underline{Z}\} \qquad G = \Re e\{\underline{Y}\}$$

$$X_C = \Im m\{\underline{Z}\} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} \qquad B_C = \Im m\{\underline{Y}\} \Rightarrow C = \frac{B_C}{\omega} \tag{2.18}$$

2.5. PUTERI DEFINITE ÎN CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV SINUSOIDAL

Pentru a putea defini puterile în regim periodic sinusoidal vom considera din nou cazul dipolului electric liniar, pasiv şi necuplat inductiv cu exteriorul (Fig.2.6).

Puterea instantanee – p se defineşte ca puterea primită în fiecare moment la borne şi este produsul dintre valorile instantane e ale tensiunii şi intensității curentului electric, având următoarea expresie:

$$p(t) = u(t)i(t) = UI\left[\cos(\varphi_U - \varphi_I) - \cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I)\right] \tag{2.19}$$

Aşa cum se observă din relația (2.19) puterea instantanee conține doi termeni: un termen constant ce caracterizează schimbul mediu de putere al dipolului cu exteriorul şi un termen alternativ ce pulsează cu dublul frecvenței tensiunii aplicate.

Puterea activă – P este prin definiție media în raport cu timpul a puterii instantanee:

$$P = \langle p \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,\mathrm{d}t = UI\cos(\varphi_U - \varphi_I) = UI\cos\varphi \quad [\mathrm{W}] \qquad (2.20)$$

Având în vedere relaţia (2.16), puterea activă este întotdeauna pozitivă şi este deci primită de dipolul liniar şi pasiv.

Luând în considerare relaţiile precizate în cazul dipolului liniar, puterea activă consumată de acesta poate fi exprimată şi în funcţie de rezistenţa, respectiv conductanţa acestuia :

$$P = RI^2 = GU^2 \qquad (2.21)$$

Puterea activă este consumată de elementele active dintr-un circuit (rezistenţele) unitatea de masură a acesteia fiind watt-ul (W).

<u>*Puterea reactivă*</u> – Q primită de dipol se defineşte prin analogie cu puterea activă:

$$Q = UI\sin\varphi \quad [\mathrm{VAR}] \qquad (2.22)$$

Această putere îşi schimbă semnul odată cu defajajul φ dintre tensiune şi curent, astfel încât poate fi atât pozitivă cât şi negativă, deci atât primită cât şi cedată de dipol.

Ca şi în cazul puterii active, puterea reactivă poate fi exprimată în funcţie de reactanţe sau susceptanţe:

$$Q = XI^2 = BU^2 \qquad (2.23)$$

Puterea reactivă este "consumată" de elementele reactive din circuit (bobinele, condensatoarele şi cuplajele magnetice între bobine), unitatea de masură fiind volt-amperul reactiv (VAR).

<u>*Puterea aparentă*</u> – S este prin definiţie produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi intensităţii curentului:

$$S = UI \quad [\mathrm{VA}] \qquad (2.24)$$

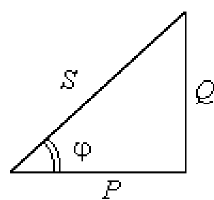
Ca şi în cazurile precedente putem exprima puterea aparentă în funcţie de imitanţele dipolului liniar şi pasiv:

$$S = ZI^2 = YU^2 \qquad (2.25)$$

Puterea aparentă este un indicator asupra funcționării circuitului fiind maximul puterii active la $\varphi = 0$, respectiv al puterii reactive la $\varphi = \pi/2$. Unitatea de masură pentru puterea aparentă este volt-amperul (VA).

Având în vedere modul de definiție al acestor puteri se poate vorbi, ca şi în cazul imitanțelor, de un triunghi al celor trei puteri: activă, reactivă şi aparentă.

În Fig.2.9 este reprezentat triunghiul puterilor precum şi relațiile de calcul ale puterilor active şi reactive, în funcție de puterea aparentă.



$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = S\cos\varphi$$

$$Q = S\sin\varphi$$

Fig.2.9 Triunghiul puterilor

O mărime foarte importantă din punct de vedere energetic este *factorul de putere* k_P definit ca raportul dintre puterea activă consumată de dipol şi puterea aparentă:

$$k_P = \frac{P}{S} = \cos\varphi \in [0\ \ 1] \qquad (2.26)$$

O sinteză a puterilor definite mai sus este *puterea complexă* $\underline{S}$ definită ca produs între imaginea complexă a tensiunii aplicată dipolului şi imaginea complex conjugată a intensității curentului absorbit:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = S\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = S(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = P + \mathrm{j}Q \qquad (2.27)$$

Aşa cum se poate observa modulul puterii complexe reprezintă puterea aparentă, partea sa reală se identifică cu puterea activă iar coeficientul părții imaginare cu puterea reactivă definite la dipol.

Relatia (2.28) precizează aceste observații.

$$|\underline{S}| = S \qquad P = \Re e\{\underline{S}\} \qquad Q = \Im m\{\underline{S}\} \tag{2.28}$$

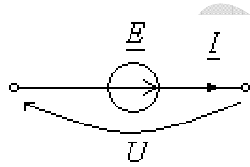
Din aceste motive în calculul de puteri se procedează direct la calculul puterii complexe după care se identifică puterile active şi reactive separând componentele sale.

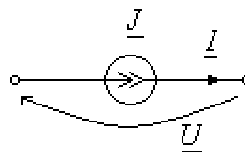
Elementele active de circuit– sursele de energie (sursele de tensiune respectiv, sursele de curent) sunt furnizoarele de putere complexă în circuit.

În cazul sursei de tensiune, puterea aparentă complexă este dată de produsul dintre imaginea în complex a tensiunii la bornele sale şi imaginea în complex conjugată a curentului debitat ce parcurge sursa.

Pentru sursa de curent, puterea aparentă complexă este dată de produsul dintre imaginea în complex a tensiunii la bornele sale şi imaginea în complex conjugată a curentului debitat de sursă.

Pentru ambele surse relațiile sunt luate cu semnul plus dacă sensurile alese de tensiune şi curent respectă regula de tip generator, altfel puterile complexe prezintă semnul minus în fața expresiilor sus menționate.





$$\underline{S} = \underline{E}\,\underline{I}^* \qquad \underline{S} = \underline{U}\,\underline{J}^* \tag{2.29}$$

Trebuie menționat că sensul tensiunii la bornele sursei de curent trebuie ales de la extremitatea indicată de săgeată la bază.

Puterea complexă totală în cazul unui circuit este alcătuită din suma tuturor puterilor complexe date de toate sursele de energie (tensiune şi curent) din circuit; partea sa reală trebuie să fie egală cu puterea activă, iar partea imaginară este egală cu puterea reactivă a circuitului.

$$\underline{S}=\sum_{k=1}^{n}\underline{E}_k\underline{I}_k^{*}+\sum_{l=1}^{n}\underline{U}_k\underline{J}_k^{*}=P+\mathrm{j}Q$$

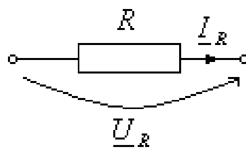
$$P=\sum_{k=1}^{n}R_k I_k^2 \quad Q=\sum_{k=1}^{n}\omega L_k I_k^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega C_k}I_k^2\pm\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}2M_k\Re e\left\{\underline{I}_k\underline{I}_l^{*}\right\} \tag{2.30}$$

Dacă se calculează separat puterea activă respectiv, puterea reactivă trebuie să avem identitățile $P=\Re e\{\underline{S}\}$, respectiv $Q=\Im m\{\underline{S}\}$.

Acestă verificare constituie o verificare a bilanțului de puteri în circuitele de curent alternativ.

2.6. COMPORTAREA ELEMENTELOR PASIVE DE CIRCUIT ÎN REGIM PERIODIC SINUSOIDAL

Rezistorul ideal – descrierea în regim periodic sinusoidal este dată în principal de ecuația sa de funcționare transpusă în complex.



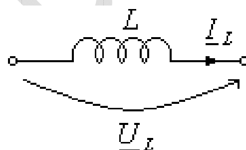
$$\underline{U}=R\underline{I} \quad \underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=R \qquad \underline{S}=\underline{U}\,\underline{I}^{*}=RI^2$$

$$\Re e\{\underline{Z}\}=R \quad \Im m\{\underline{Z}\}=0 \qquad P=RI^2 \quad Q=0$$

$$\varphi=0 \quad \cos\varphi=1$$

Prin urmare, în cazul rezistorului ideal, curentul ce îl parcurge este în fază cu tensiunea, iar acesta consumă numai putere activă.

Bobina ideală – ecuația de funcționare a bobinei ideale ne conduce la următoarea descrierea în complex.



$$\underline{U}=\mathrm{j}\omega L\underline{I} \quad \underline{Z}_L=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=\mathrm{j}\omega L \qquad \underline{S}=\underline{U}\,\underline{I}^{*}=\mathrm{j}\omega LI^2$$

$$\Re e\{\underline{Z}\}=0 \quad \Im m\{\underline{Z}\}=X_L=\omega L \qquad P=0 \quad Q=\omega LI^2>0$$

$$\varphi=\frac{\pi}{2} \quad \cos\varphi=0$$

În cazul bobinei ideale tensiunea este defazată înainte față de curent cu $\pi/2$, iar aceasta consumă numai putere reactivă.

Termenul $X_L = \omega L > 0$ se numeşte reactanță inductivă a bobinei şi este o caracteristică a bobinei pentru o anumită frecvență.

Condensatorul ideal – ecuația de funcționare a condensatorului ideal ne conduce la următoarea descriere în complex.

$$\underline{U} = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C}\underline{I} \quad \underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C}$$

$$\Re e\{\underline{Z}\} = 0 \quad \Im m\{\underline{Z}\} = X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C} I^2$$

$$P = 0 \quad Q = -\frac{1}{\omega C} I^2 < 0$$

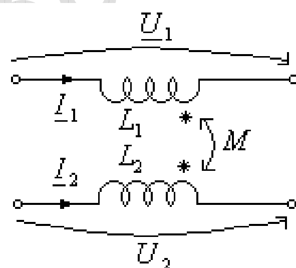
$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \cos\varphi = 0$$

În cazul condensatorului ideal tensiunea este defazată înainte față de curent cu $-\pi/2$, iar aceasta consumă numai putere reactivă.

Termenul $X_C = -\frac{1}{\omega C} < 0$ se numeşte reactanță capacitivă a condensatorului şi este o caracteristică a condensatorului pentru o anumită frecvență. De cele mai multe ori se indică numai valoarea absolută a acestei reactanțe de semnul ei ținându-se cont explicit numai la scrierea ecuațiilor circuitului şi la bilanțul de puteri.

Bobine ideale cuplate magnetic – vom considera două bobine ideale de inductivități proprii L_1 respectiv, L_2 şi de inductivitate mutuală $L_{12} = L_{21} = M$.

Ecuațiile caracteristice acestor bobine rezultă din scrierea ecuațiilor de tensiuni:



$$\underline{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \underline{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_2 \underline{I}_2 \pm \mathrm{j}\omega M \underline{I}_1$$
$$\underline{Z}_m = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{I_1=0} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}1}\right)_{I_2=0} = \mathrm{j}\omega M \qquad (2.31)$$
$$X_m = \omega M$$

Semnele $\pm$ din scrierea ecuațiilor de tensiuni se decid în funcție de poziția bornelor polarizate față de curenții ce parcurg bobinele: dacă ambii curenți intră sau ies este semnul plus, altfel semnul este minus.

Termenul $X_m = \omega M$ reprezintă o caracterizare cantitativă a cuplajului şi reprezintă reactanța inductivă mutuală a celor două bobine cuplate magnetic.

Puterea complexă a cuplajului va fi:

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = \mathrm{j}\left[\omega L_1 I_1^2 + \omega L_1 I_1^2 + 2M\omega I_1 I_2 \cos(\underline{I}_1 \underline{I}_2)\right]$$

$$P = 0 \qquad Q = \omega L_1 I_1^2 + \omega L_1 I_1^2 + 2M\omega I_1 I_2 \cos(\underline{I}_1 \underline{I}_2) \tag{2.32}$$

Aşa cum se observă din relația de mai sus, sistemul nu consumă decât putere reactivă. Ultimul termen din expresia puterii reactive este datorat cuplajului magnetic şi este numit şi putere reactivă de cuplaj.

$$Q_m = 2M\omega I_1 I_2 \cos(\underline{I}_1 \underline{I}_2) = \pm 2M\omega \Re e\left\{\underline{I}_1 \underline{I}_2^*\right\} \qquad \Re e\left\{\underline{I}_1 \underline{I}_2^*\right\} = \Re e\left\{\underline{I}_2 \underline{I}_1^*\right\} \tag{2.33}$$

Puterea reactivă datorată cuplajului poate fi pozitivă sau negativă după cum curenții ce parcurg bobinele cuplate intră sau ies din bornele polarizate.

Separarea cuplajelor magnetice

Sunt cazuri în care problemele prezintă anumite simplificări dacă se procedează la desfacerea cuplajelor magnetice.

Separarea cuplajelor magnetice este posibilă dacă cele două bobine cuplate magnetic au un punct comun.

În această situație, în funcție de poziția bornelor polarizate şi de curenții electrici prin bobine, cuplajul magnetic este eliminat introducându-se pe latura ce porneşte din nodul comun o nouă bobină ce are inductivitatea în funcție de inductivitatea de cuplaj.

Valorile inductivităților bobinelor cuplate şi ale bobinei ce apare pe latura de nod comun se pot uşor determina scriind ecuațiile de tensiuni pentru cele două bobine.

Se obțin în felul acesta următoarele rezultate sintetizate în Fig. 2.10.

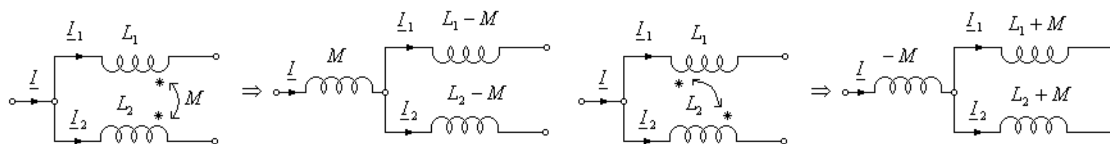


Fig.2.10 Desfacerea cuplajelor magnetice.

Prin urmare, dacă curenţii au acelaşi sens faţă de bornele polarizate (intră sau ies), inductivităţile magnetice ale celor două bobine scad cu $-M$, iar pe latura de nod comun se adaugă o bobină de inductivitate M.

Dacă curenţii au sens contrar faţă de bornele polarizate (unul intră celălalt iese sau invers), inductivităţile magnetice ale celor două bobine cresc cu M, iar pe latura de nod comun se adaugă o bobină de inductivitate $-M$.

2.7. METODE DE REZOLVARE A CIRCUITELOR ELECTRICE MONOFAZATE DE CURENT ALTERNATIV

O primă medodă de rezolvare a circuitelor electrice monofazate de curent alternativ este *metoda directă* care constă în scrierea ecuaţiilor lui Kirchhoff în reprezentările specifice regimului permanent sinusoidal.

Pentru a prezenta modul de scriere al ecuaţiilor date de teoremele lui Kirchhoff vom considera un circuit liniar complet format din L laturi şi N noduri; corespunzător, numărul buclelor independente este $B=L-N+1$.

În cazul cel mai general fiecare latură de circuit se presupune alcătuită dintr-un rezistor de rezistenţă R_k, un condensator de capacitate C_k, şi o bobină de inductivitate proprie L_k, eventual cuplată

magnetic cu bobinele altor laturi, inductivitățile mutuale corespunzatoare având valorile L_{kk}.

<u>*Prima teoremă a lui Kirchhoff*</u> în aceste condiții se poate enunța:

"*Suma algebrică a imaginilor în complex ale intensităților curenților din laturile incidente la un nod este nulă*".

$$\sum_{k\in(j)} \underline{I}_k = 0 \qquad j = 1,2,\dots,N-1 \tag{2.34}$$

<u>*A doua teoremă a lui Kirchhoff*</u> devine:

"*Suma algebrică a imaginilor în complex ale căderilor de tensiune pe laturile unei bucle este egală cu suma algebrică (considerată în acelaşi sens de parcurgere) a tensiunilor electromotoare din laturile aceleiaşi borne*":

$$\sum_{k\in(p)}\left[\left(R_k + \mathrm{j}\omega L_k - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_k}\right)\underline{I}_k + \sum_{h(\neq k)} \mathrm{j}\omega L_{kk}\underline{I}_k\right] = \sum_{k\in(p)} \underline{E}_k \qquad p = 1,2,\dots,B \tag{2.35}$$

Aşa cum se poate observa, ecuațiile (2.33), respectiv (2.35), formează un sistem complet de ecuații algebrice liniare neomogene, cu coeficienți constanți, în care necunoscutele sunt imaginile complexe ale intensităților curenților.

Dacă se notează cu $\underline{Z}_k$ impedanța complexă a laturii complete k şi cu $\underline{Z}_{kk}$ impedanța complexă a cuplajului:

$$\underline{Z}_k = \underline{Z}_{R_k} + \underline{Z}_{L_k} + \underline{Z}_{C_k} = R_k + \mathrm{j}\omega L_k - \frac{\mathrm{j}}{\omega C_k} \qquad \underline{Z}_{kk} = \mathrm{j}\omega L_{kk} \tag{2.36}$$

Folosind notațiile din relația (2.35), ecuațiile lui Kirchhoff în complex vor deveni:

$$\sum_{k\in(j)} \underline{I}_k = 0 \qquad j = 1,2\ldots N-1;$$
$$\sum_{k\in(p)} \left(\underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{h(\neq k)} \underline{Z}_{kk} \underline{I}_k \right) = \sum_{h\in(p)} \underline{E}_k \qquad p = 1,2,\ldots B; \tag{2.37}$$

În ecuaţiile (2.33), (2.34), cât şi în setul de ecuaţii (2.36), sumările algebrice sunt făcute pentru toate laturile *k* incidente la un nod *j*, respectiv aparţinând unei bucle *p*.

Cu ajutorul celor două teoreme se scriu (*N*-1), respectiv *B* ecuaţii liniar independente alcătuind un sistem de *L* ecuaţii independente liniare şi neomogene.

Forma (2.36) evidenţiază caracterul algebric al acestor ecuaţii în raport cu necunoscuta $\underline{I}_k$.

Modul concret de a aplicare a metodei presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. Calculul impedanţelor complexe ale laturilor circuitului ca şi a formei complexe a semnalelor de excitaţie, date de obicei în expresii sub forma instantanee.

2. Propunând anumite sensuri pentru curenţii prin laturi (absolut arbitrare), se scriu ecuaţiile (2.37) ale circuitului direct în forma complexă.

3. Se rezolvă sistemul de ecuaţii astfel obţinut, determinând intensităţile necunoscute ale curenţilor în imagine complexă $\underline{I}_k = I_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$.

4. Pe baza regulii de corespondenţă biunivocă cunoscută, se scriu apoi expresiile instantanee ale acestor curenţi: $i_k(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_k)$. De obicei în paralel cu rezolvarea analitică a sistemului se realizează şi diagrama sa fazorială.

5. Validarea soluției obținute se poate face verificând bilanțul puterilor prin calcularea puterii complexe şi separat a puterii active şi reactive consumate de circuit – relațiile (2.30). O altă metodă de verificare a expresiei curenților obținuți este prin calcularea tensiunii între două puncte oarecare ale circuitului pe căi diferite.

Pentru calculul tensiunii între două puncte *A* şi *B* (care pot fi noduri sau simple borne) ale circuitului, se alege mai întâi o cale (C_{AB}) care să unească aceste puncte, urmărind numai laturi ale circuitului. Aplicând teorema potențialului electric corespunzătoare acestui regim periodic rezultă:

$$\underline{U}_{AB} = \sum_{k \in (C_{AB})} \underline{U}_k \qquad (2.38)$$

În (2.38) $\underline{U}_k$ reprezintă tensiunea la bornele unei laturi k ce aparține căii C_{AB} alese.

Pe de altă parte, imaginea complexă a tensiunii la bornele laturii respective este, folosind notațiile (2.39):

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{h(\neq k)} \underline{Z}_{kk} \underline{I}_k - \underline{E}_k \qquad (2.39)$$

Prin urmare se va obține în final:

$$\underline{U}_{AB} = \sum_{k \in (C_{AB})} \left(\underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{h(\neq k)} \underline{Z}_{kk} \underline{I}_k - \underline{E}_k \right) \qquad (2.40)$$

Este foarte important de observat că dacă între elementele inductive ale circuitului nu există cuplaje magnetice ($\underline{Z}_{mkh} = 0$, pentru orice $k \neq h$), sistemul de ecuații (2.39) capătă o formă mult mai simplă:

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in (j)} \underline{I}_k = 0 \qquad j = 1,2 \ldots N-1; \\ &\sum_{k \in (p)} \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum_{h \in (p)} \underline{E}_k \qquad p = 1,2, \ldots B; \end{aligned} \qquad (2.41)$$

Forma de ecuaţii (2.41) este foarte asemănătoare cu ecuaţiile Kirchhoff ce descriu rezolvarea circuitelor de curent continuu tratate în capitolul 1.

Analogia formală dintre ecuaţiile de descriere ale circuitelor de curent continuu şi cele de curent alternativ poate fi descrisă de următorul tabel:

c.c		c.a.	c.c		c.a.
R		$\underline{Z}$	E		$\underline{E}$
G	$\Rightarrow$	$\underline{Y}$	J	$\Rightarrow$	$\underline{J}$
I		$\underline{I}$	U		$\underline{U}$

Fig.2.11. Analogia formală dintre mărimile din circuitele de c.c şi cele de c.a.

Dualismul prezentat în Fig.2.11. arată că în cazul circuitelor de curent alternativ fără cupalaje magnetice se pot folosi, fară nici o modificare, teoremele şi metodele de calcul stabilite pentru circuitele de curent continuu (vezi capitolul 1).

În mod evident, unele deosebiri care vor fi accentuate în cele ce urmează, vor apărea la circuitele ce conţin cuplaje magnetice, datorită impedanţei mutuale de cuplaj $\underline{Z}_m = j\omega L_m$, fără corespondent în circuitele de curent continuu.

Teoreme de echivalenţă în circuitele de curent alternativ

Deseori, un circuit de o complexitate mai ridicată din punct de vedere al numărului elementelor (active şi pasive) pe care acesta le conţine, poate fi echivalat cu un circuit mai simplu dacă se ţine seama de anumite teoreme de echivalenţă (transfigurări) care pot fi aplicate circuitului.

Teorema de echivalenţă dintre sursele de energie – ca şi în cazul surselor de curent continuu şi sursele de curent alternativ pot fi

transformate fie în surse de tensiune (cele de curent), fie în surse de curent (cele de tensiune).

Se ilustrează acest lucru, cu mențiunea că în curent alternativ $R \to \underline{Z} \quad G \to \underline{Y} \quad E \to \underline{E} \quad J \to \underline{J}$

$$\underline{J} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} \qquad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \tag{2.42}$$

<u>Conectarea elementelor de circuit</u> – poate fi realizată serie sau paralel în mod absolut analog ca şi cel al elementelor de curent continuu.

Conectarea serie precum şi divizorul de tensiune $(R_k \to \underline{Z}_k)$ are următoarele rezultate:

$$\underline{E} = \sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k \qquad R = \sum_{k=1}^{n} R_k \qquad \underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k$$
$$\underline{Z} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k \qquad X = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \underline{U}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}} \underline{U} \tag{2.43}$$

Conectarea paralel precum şi divizorul de curent $(G_k \to \underline{Y}_k)$ are următoarele rezultate:

$$\underline{J} = \sum_{k=1}^{n} \underline{J}_k \qquad \underline{J} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} \qquad G = \sum_{k=1}^{n} G_k \qquad \underline{I}_k = \underline{Y}_k \underline{U}$$
$$\underline{Y} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \qquad \underline{J}_k = \frac{\underline{E}_k}{\underline{Z}_k} \qquad B = \sum_{k=1}^{n} B_k \qquad \underline{I}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}} \underline{I} \tag{2.44}$$

<u>Transfigurarea stea-tringhi</u> are aceleaşi rezultate ca şi în cazul circuitelor de curent continuu $(R \to \underline{Z})$, astfel:

Transfigurarea triunghi-stea Transfigurarea stea-triunghi

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \qquad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$
$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \qquad \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$
$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}} \qquad \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1} \tag{2.45}$$

Teoremele lui Thevenin şi Norton – continuând analogia cu circuitele de curent continuu cu modificările următoare: în cazul teoremei lui Thevenin $E_0 \to \underline{E}_0 \quad E \to \underline{E} \quad R_0 \to \underline{Z}_0 \quad R \to \underline{Z}$ în cazul teoremei lui Norton ($J_0 \to \underline{J}_0 \quad J \to \underline{J} \quad G_0 \to \underline{Y}_0 \quad Y \to \underline{Y}$;

Torema lui Thevenin

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_0 \pm \underline{E}}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}}$$

dacă $\underline{E} = 0$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}}$$

Teorema lui Norton

$$\underline{U} = \frac{\underline{J}_0 \pm \underline{J}}{\underline{Y}_0 + \underline{Y}}$$

dacă $\underline{J} = 0$

$$\underline{U} = \frac{\underline{J}_0}{\underline{G}_0 + \underline{G}}$$

(2.46)

Teorema transferului maxim de putere – impune ca pentru un trasfer maxim de putere de la un dipol la o sarcina $\underline{Z}$ ca valoarea impedanței interne a dipolului $\underline{Z}_0$ să fie egală cu conjugata impedanței circuitului exterior.

Prin urmare, ca transferul de putere sa fie maxim, trebuie ca ($R_0 \to \underline{Z}_0 \quad R \to \underline{Z}$). O astfel de sarcină se numeşte *sarcină adaptată* dipolului.

$$\underline{Z} = \underline{Z}^* \qquad R = R_0 \qquad X = -X_0 \qquad (2.47)$$

Ca şi în curent continuu şi de această dată randamentul trasmisiei este destul de mic (de numai 50 %), randament foarte scăzut față de nivelul acestuia în cazul transmiterii energiei.

Pasivizarea elementelor active se face la fel ca şi în curent continuu cu aceleaşi substituții ca şi la teoremele anterioare.

2.8. ASUPRA METODELOR SISTEMATICE DE REZOLVARE A CIRCUITELOR DE CURENT ALTERNATIV CE CONŢIN BOBINE CUPLATE MAGNETIC

Pentru a reduce volumul calculelor necesare rezolvării unui circuit în cazul unui circuit, în cazul circuitelor de c.a. sinusoidal se pot aplica aceleaşi două metode sistematice folosite şi în rezolvarea circuitelor de c.c., *metoda curenţilor de contur* (ciclici de buclă) şi *metoda potenţialelor nodurilor*. (vezi capitolul 1).

În cazul în care între laturile circuitului există cuplaje magnetice, forma de aplicare a celor două metode suferă modificări importante.

1) Metoda curenţilor de contur

Formal, existenţa cuplajelor magnetice nu schimbă ecuaţiile circuitului scrise în curenţii de contur – adică în acei curenţi fictivi de intensitate $\underline{I}_p^c$ care se presupune că circulă independent pe fiecare din buclele fundamentale ale circuitului.

Întrucât intensităţile curenţilor electrici prin laturi se determină ca sume algebrice ale curenţilor de contur ce parcurg laturile respective, prima teorema a lui Kirchhoff se reduce la o simplă identitate; noile ecuaţii în număr egal cu numarul de bucle *B* fundamentale (independente) ale circuitului, reprezintă forma pe care o capată a doua teoremă a lui Kirchhoff în noile variabile :

$$\sum_{p=1}^{B} \underline{Z}_{qp} \underline{I}_p^c = \underline{E}_q^c \tag{2.48}$$

Reamintim şi precizăm că în aceste ecuaţii :

$\underline{Z}_{qq}$– reprezintă impedanţa proprie a buclei *q*, ea fiind egală cu suma impedanţelor proprii ale laturilor ce alcătuiesc această buclă, la care se adaugă acum şi contribuţiile de forma $2\underline{Z}_m = \pm 2\,\mathrm{j}\omega L_m$, datorate cuplajelor magnetice dintre perechile de bobine apartinând *aceluiaşi* ochi, cu semn ce se alege în funcţie de poziţia curentului de contur de intensitate $\underline{I}_q^c$ faţă de bornele polarizate ale celor două bobine;

$\underline{Z}_{qp}$ – reprezintă impedanţa de cuplaj a buclelor *p* şi *q* ea este egală cu suma impedanţelor proprii ale laturilor comune celor două bucle

(luate cu semnul + sau – , după cum curenții de contur $\underline{I}_q^c$ şi $\underline{I}_p^c$ au sau nu acelaşi sens în aceste laturi), la care se adaugă suma impedanțelor mutuale dintre perechile de bobinşe aparținând câte una fiecărei bucle (semnele acestora rezultă din modul în care se asociază sensul fiecărui curent de contur cu borna polarizată a bobinei corespunzătoare Fig.2.11).

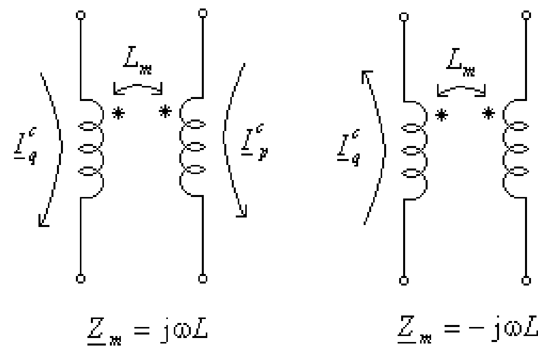


Fig.2.11.Contribuția cuplajelor magnetice la impedanțele dintre bucle.

Coeficienții $\underline{E}_q^c$ numiți t.e.m. de contur, reprezintă suma algebrică a t.e.m. din laturile buclei *q*, sumă ce se efectuează în raport cu sensul curentului de intensitate $\underline{I}_q^c$.

1) <u>Metoda potențialelor nodurilor</u>

Aceasta metodă poate fi aplicată dacă şi numai dacă cuplajele pot fi separate (bobinele cuplate se află pe laturi ce au noduri comune).

Metoda se va aplica apoi pentru circuitul obținut prin desfacerea cuplajelor urmărind algoritmul specific acestei metode.

Se determină astfel curenții prin fiecare latură a circuitului.

Tensiunile între diversele puncte ale circuitelor precum şi cele de la bornele elementelor de circuit *<u>nu mai sunt cele reale</u>*.

Pentru a determina tensiunile reale se revine la schema ce conține cuplaje magnetice şi se determină, folosind teorema a doua a lui Kirchhoff, tensiunile căutate.

Despre determinarea generatoatelor echivalente între diverse puncte ale circuitului

Dacă se doreşte determinarea generatoarelor de tensiune sau curent între două puncte ale unui circuit ce conține cuplaje magnetice trebuie urmărite două etape.

În primul rând se determină tensiunea între punctele respective (prin una din metodele cunoscute) eliminând din circuit elementele cuprinse între punctele între care se doreşte determinarea generatorului echivalent.

Pentru a determina impedanța între cele două puncte se pasivizează circuitul (cuplajele între bobine nu se elimină) după care, fie se aplică între cele două puncte o tensiune sinusoidală determinându-se apoi curentul ce o parcurge, fie se aplică între cele două puncte o injecție de curent sinusoidală determinându-se tensiunea la bornele sale.

Impedanța între cele două puncte va fi raportul dintre tensiunea aplicată şi curentul ce o parcurge, sau raportul dintre tensiunea la bornele sursei de curent şi valoarea curentului dat de aceasta.

3.

CIRCUITE ELECTRICE TRIFAZATE

3.1 SISTEME DE MĂRIMI TRIFAZATE – PROPRIETĂŢI

Prin *rețea polifazată* se înțelege, în general, o rețea de curent alternativ în care acționează două sau mai multe surse cu tensiuni electromotoare de aceeaşi frecvență, cu amplitudini egale, dar defazate unele față de altele cu unghiuri determinate. Ansamblul acestor tensiuni elector-motoare formează un *sistem polifazat* de t.e.m.. În general, orice fel de mărimi alternative pot forma sisteme polifazate.

Cel mai mult s-a răspândit în practică *sistemul trifazat*, care prezintă numeroase avantaje în tehnica curenților tari:

– o transmisie de energie mai economică;

– posibilitatea de a dispune la utilizare de două tensiuni pentru consumatorii monofazați;

– posibilitatea de a produce câmpuri magnetice învârtitoare, care permit realizarea unor motoare simple şi robuste (motoare asincrone);
– utilizarea mai bună a materialelor în construcţia generatoarelor şi transformatoarelor.

Toate aceste avantaje au făcut ca în tehnica actuală producerea, transmisia şi distribuţia energiei electromagnetice (electrice) să se facă aproape exclusiv sub formă de curent alternativ trifazat.

Prin definiţie, un sistem ordonat de trei mărimi sinusoidale având aceeaşi pulsaţie, dar amplitudini şi faze iniţiale în general diferite, alcătuiesc un *sistem trifazat*. Dacă amplitudinile (respectiv, valorile eficace) ale celor trei mărimi sunt egale, iar fazele lor diferă prin valoarea relativă $2\pi/3$, sistemul este numit *trifazat simetric*.

Dacă mărimile sistemului trifazat sunt defazate în sens trigonometric invers (a doua în urma celei dintâi şi a treia în urma celei de-a doua) sistemul trifazat este *simetric direct* sau de *succesiune directă* (s.d.):

$$x_1(t) = \sqrt{2}X \sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \underline{X}_1 = X\,\mathrm{e}^{j\alpha} = X \exp(j\alpha)$$

$$x_2(t) = \sqrt{2}X \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \underline{X}_2 = X\,\mathrm{e}^{j\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)} = X \exp\left(j\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$x_3(t) = \sqrt{2}X \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \underline{X}_2 = X\,\mathrm{e}^{j\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)} = X \exp\left(j\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Dacă defazarea se face în sens trigonometric direct, sistemul de mărimi este numit sistem trifazat *simetric invers* sau de *succesiune inversă* (s.i.):

$$x_1(t) = \sqrt{2}X \sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \underline{X}_1 = X\,\mathrm{e}^{j\alpha} = X \exp(j\alpha)$$

$$x_2(t) = \sqrt{2}X \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \underline{X}_2 = X\,\mathrm{e}^{j\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)} = X \exp\left(j\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$x_3(t) = \sqrt{2}X \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \underline{X}_2 = X\,\mathrm{e}^{j\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)} = X \exp\left(j\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Este util de reținut şi cazul în care cele trei mărimi ale sistemului, având valori efective egale, sunt în fază, caz în care sistemul se numeşte *omopolar* sau de succesiune omopolar (s.o.) :

$$x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = \sqrt{2}X\sin(\omega t + \alpha) \Leftrightarrow \underline{X}_1 = \underline{X}_2 = \underline{X}_3 = X\,\mathrm{e}^{j\alpha} = X\exp(j\alpha)$$

Cum mărimile trifazate sunt înlocuite cu tensiuni față de o referință, $x_1 = u_{10}, x_2 = u_{20}, x_3 = u_{30}$ vom obține pentru fiecare din cele trei cazuri anterior amintite sistemele de tensiuni corespunzătoare. (Fig.1.1)

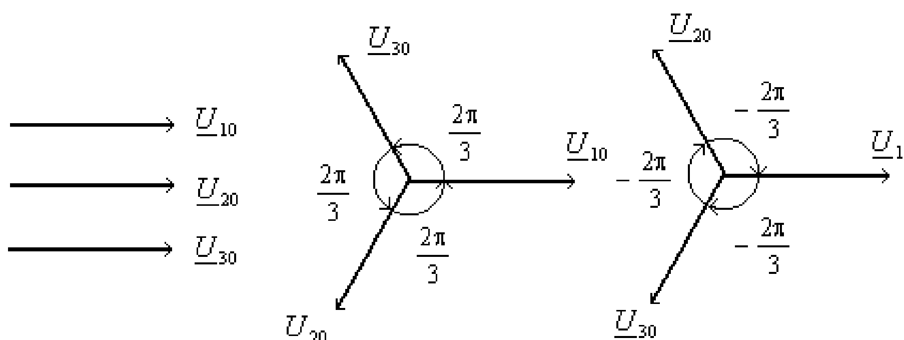


Fig.3.1 Sistemele de tensiuni trifazate simetrice: omopolar, direct şi invers.

În Fig.3.1 am folosit reprezentarea fazorială a mărimilor sinusoidale în care am ales ca faza inițială nulă (α=0), pentru o mai bună ilustrare a caracteristicilor acestor sisteme simetrice de tensiuni.

În cele ce urmează vom restrânge prezentarea numai la sistemele trifazate simetrice de succesiune directă, concluzii analoge celor obținute pentru aceste sisteme fiind uşor de stabilit şi în cazul sistemelor inverse, şi cu atât mai mult al celor omopolar. De aceea, exceptând o precizare expresă, de acum înainte prin *sistem trifazat simetric* se va înțelege sistemul corespunzător de succesiune directă. Acest lucru este cu atât mai firesc, cu cât caracterul succesiunii ține de modul de ordonare al mărimilor, astfel încât, dacă aceasta nu a fost

impusă în prealabil (de obicei din considerente de ordin funcțional), ea se poate face întotdeauna aşa încât sistemul de mărimi să fie simetric direct.

De remarcat faptul că scrierea acestor mărimi sinusoidale este mult simplificată dacă se foloseşte pentru operatorul de rotație de unghi $2\pi/3$ notația :

$$a = \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{3}} = \exp\left(j\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ atunci:}$$

$$\underline{X}_1 = X\exp(j\alpha); \quad \underline{X}_2 = \underline{X}_1 a^2; \quad \underline{X}_3 = \underline{X}_1 a$$

Acest operator de rotație are câteva proprietăți remarcabile:

$$a^2 = a^* = \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{3}} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3 = 1; \quad a^2 + a + 1 = 0; \quad a^{3k+1} = a; \quad a^{3k-1} = a^2; \quad a^{3k} = 1; \quad k \in \boldsymbol{N}$$

Prin urmare, multiplicarea unui fazor cu a duce la rotirea reprezentării acestuia în planul complex cu $2\pi/3$ (în sens trigonometric) fără a se modifica modulul. Analog, multiplicarea cu a^2 a unui fazor determină o rotație a reprezentării acestuia cu $-2\pi/3$ (în sens orar).

Prin urmare, utilizând operatorul a, componentele unui sistem de tensiuni simetric de succesiune directă, respectiv inversa, se pot scrie: (vezi Fig.3.1)

$$\underline{U}_{10} = \underline{U}_d; \quad \underline{U}_{20} = a^2\underline{U}_d; \quad \underline{U}_{31} = a\underline{U}_d \qquad \underline{U}_{10} = \underline{U}_i \quad \underline{U}_{20} = a\underline{U}_i \quad \underline{U}_{31} = a^2\underline{U}_i$$

În Fig.3.2 am reprezentat variația în domeniul timp a unui sistem de tensiuni trifazice simetric de succesiune directă şi cu faza inițială nulă, pentru o valoare efectivă a tensiunii de 220 V şi o frecvență de f = 50 Hz.

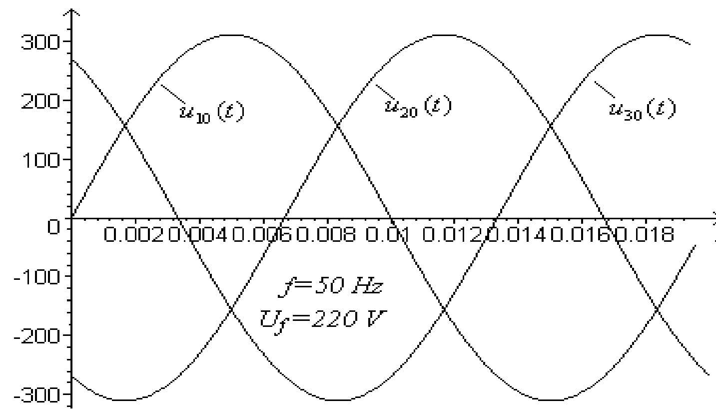


Fig.3.2 Variația în timp a tensiunilor unui sistem simetric de succesiune directă.

Tensiunile $\underline{U}_{10}$, $\underline{U}_{20}$, $\underline{U}_{30}$ se mai numesc şi *tensiunile de fază la generator* deoarece furnizează tensiunile de fază cu care se alimentează receptoarele trifazate. În mod uzual acestea au valorile $U_f = 220\,\mathrm{V}$.

În rezolvarea circuitelor electrice trifazate intervin frecvent situații când interesează diferența, într-o ordine dată, a mărimilor sistemului trifazat simetric.

Dacă diferența se face într-o ordine directă (naturală) se obține în imagini complexe:

$$\underline{X}_{12} = \underline{X}_1 - \underline{X}_2 = \underline{X}_1(1-a^2) = \underline{X}_1\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\,\underline{X}_1 \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\underline{X}_{23} = \underline{X}_2 - \underline{X}_3 = \sqrt{3}\,\underline{X}_2 \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right); \quad \underline{X}_{31} = \underline{X}_3 - \underline{X}_1 = \sqrt{3}\,\underline{X}_3 \exp\left(j\frac{\pi}{6}\right)$$

Dacă diferențele se fac în ordine inversă, rezultă următoarele:

$$\underline{X}_{13} = \underline{X}_1 - \underline{X}_3 = -\underline{X}_{31} = \underline{X}_1(1-a) = \underline{X}_1\left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\,\underline{X}_1 \exp\left(-j\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\underline{X}_{21} = \underline{X}_2 - \underline{X}_1 = \sqrt{3}\,\underline{X}_2 \exp\left(-j\frac{\pi}{6}\right); \quad \underline{X}_{23} = \underline{X}_2 - \underline{X}_3 = \sqrt{3}\,\underline{X}_3 \exp\left(-j\frac{\pi}{6}\right)$$

Pentru un sistem de tensiuni trifazic simetric de succesiune directă şi cu faza inițială nulă, pentru o valoare efectivă a tensiunii de

220 V şi o frecvenţă de $f = 50$ Hz, variaţiile în timp ale mărimilor diferenţă sunt reprezentate în Fig.3.3.

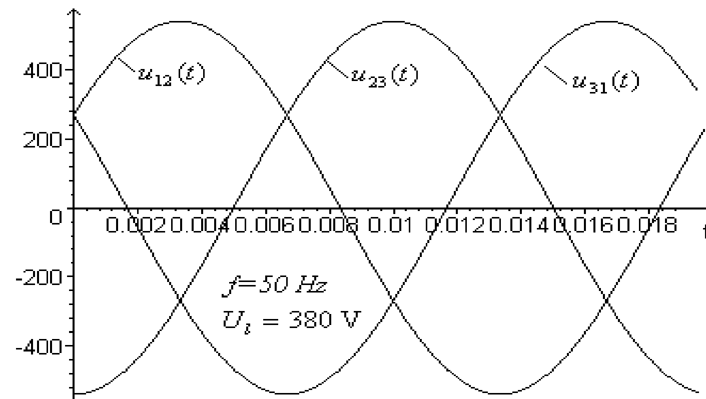


Fig.3.3 Variaţiile în timp ale mărimilor diferenţă.

Tensiunile $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ se mai numesc şi *tensiunile de linie la generator*, deoarece furnizează tensiunile dintre liniile de alimentare cu care se alimentează receptoarele trifazate. în mod uzual acestea au valorile $U_l = \sqrt{3}U_f = 380\ \text{V}$.

Relaţiile determinate mai sus, numite şi teoremele diferenţei arată că diferenţele efectuate în aceeaşi ordine între mărimile unui sistem trifazat simetric alcătuiesc la rândul lor un sistem asemănător, mărimile diferenţă având valori efective de $\sqrt{3}$ ori mai mari decât cele ale mărimilor sistemului iniţial şi fiind defazate cu $\pi/6$, în sens trigonometric direct sau invers –după cum diferenţele s-au făcut în ordine naturală sau invers. În Fig. 3.4. am reprezentat pentru acelaşi sistem trifazat de tensiuni sistemul mărimilor diferenţă.

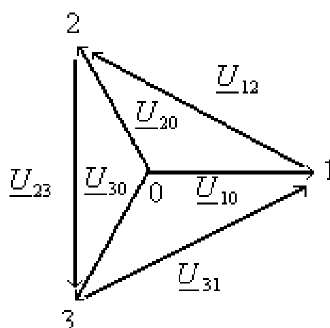


Fig.3.4 Sistemul mărimilor diferenţă.

În tehnică, liniile trifazate de distribuţie a energiei electrice au tensiunea de fază $U_f = 220\,\text{V}$ şi tensiunea de linie $U_l = \sqrt{3}U_f = 380\,\text{V}$ la frecvenţa de 50 Hz. În instalaţii mai vechi sau din motive de securitate (laboratoare) se mai utilizează şi tensiunile $U_f = 127\,\text{V}$ şi $U_l = 220\,\text{V}$ la aceeaşi frecvenţă de 50 Hz.

De menţionat că în această situaţie noţiunile de *fază* respectiv de *linie,* se referă la sursa de tensiune trifazată (generatorul de tensiune trifazată) şi *nu* la receptorul trifazic.

3.2 RECEPTOARE TRIFAZATE – TIPURI DE CONEXIUNI

În principal, receptoarele trifazate pot fi conectate în *stea* (Y) sau în *triunghi* (Δ). La rândul său, conexiunea stea comportă două tipuri de topologie – stea cu conductor neutru (Y0), respectiv stea fără conductor neutru.

Conexiunea stea se realizează legând câte una din extremităţile fiecărei faze într-un punct comun N, numit punct neutru, iar celelalte extremităţi la liniile de alimentare. În cazul când se utilizează şi o a patra legătură punând în conexiune firul de la punctul N la O –

punctul neutru al rețelei (generatorului), se realizează *receptorul stea cu conductor neutru*.

Conexiunea triunghi se realizează legând fazele în continuare (sfârşitul uneia cu începutul celeilalte), iar legătura la liniile de alimentare se face de la punctele de joncțiune dintre faze.

Receptoarele, indiferent de tipul conexiunii se numesc *echilibrate*, dacă valoarea impedanțelor fiecărei faze receptor este aceeaşi, altfel spunem că receptorul este *dezechilibrat*.

Receptorul trifazat stea cu fir neutru

Considerăm receptorul trifazat stea cu fir neutru reprezentat în Fig.3.5; impedanțele fazelor sale sunt $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, în general diferite de zero iar $\underline{Z}_0$ este impedanța conductorului neutru.

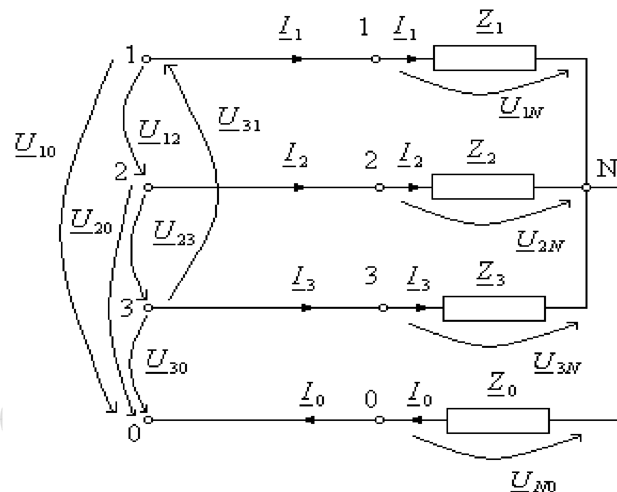


Fig.3.5 Receptorul trifazat stea cu fir neutru şi mărimile caracteristice funcționării sale.

Mărimile cu ajutorul cărora poate fi descrisă comportarea receptorului sunt următoarele:

- Tensiunile între bornele de alimentare ale fazelor, bornele notate 1, 2, 3 şi borna 0 a conductorului neutru (punctul neutru al rețelei): $\underline{U}_{10}, \underline{U}_{20}, \underline{U}_{30}$, numite *tensiunile de fază la alimentare* (la generator).

- Tensiunile între bornele de alimentare ale fazelor: $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$ numite *tensiuni între faze* sau *de linie*.
- Tensiunile între bornele de alimentare ale fazelor şi punctul neutru N al receptorului: $\underline{U}_{1N}, \underline{U}_{2N}, \underline{U}_{3N}$, numite *tensiuni de fază la receptor*.
- Tensiunea dintre punctul N al receptorului şi neutrul 0 al rețelei de alimentare, notată cu $\underline{U}_{N0}$ şi numită deplasarea neutrului.
- Curenții de intensități $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$, care circulă prin fazele receptorului numiți *curenți de fază.*
- Curenții prin conductoarele liniei trifazate de alimentare, numiți *curenți de linie*, în mod evident în cazul receptoarelor trifazate cu conexiune în stea, aceşti curenți sunt aceeaşi cu curenții de fază.
- Curentul de intensitate $\underline{I}_0$ din conductorul neutru.

Rezolvarea receptorului trifazat înseamnă în general determinarea intensităților curenților absorbiți de receptor, atunci când sunt date tensiunile de alimentare $\underline{U}_{10}, \underline{U}_{20}, \underline{U}_{30}$ şi impedanțele fazelor receptorului $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ şi a conductorului neutru $\underline{Z}_0$.

Intensitățile curenților de faza şi prin conductorul neutru, se pot determina utilizând admitanțele acestor faze şi respectiv a conductorului neutru:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U}_{1N} = \underline{Y}_1 (\underline{U}_{10} - \underline{U}_{N0}); \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U}_{2N} = \underline{Y}_2 (\underline{U}_{20} - \underline{U}_{N0})$$
$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{U}_{3N} = \underline{Y}_3 (\underline{U}_{30} - \underline{U}_{N0}); \quad \underline{I}_0 = \underline{Y}_0 \underline{U}_{N0} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

Aplicând prima teorema a lui Kirchhoff în punctul N al receptorului vom obține căderea de tensiune pe firul neutru sau deplasarea neutrului:

$$\underline{U}_{N0} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_{10} + \underline{Y}_2 \underline{U}_{20} + \underline{Y}_3 \underline{U}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_0}$$

Relația de mai sus constitue **relaţia lui Millman**, şi cu ajutorul ei se determină uşor curenții pe fazele receptorului şi prin conductorul neutru.

Putem observa că tensiunea $\underline{U}_{N0}$, adică deplasarea (potențialului) punctului *N* față de punctul de referință al alimentarii 0, poate capătă, dacă receptorul este puternic dezechilibrat, valori relativ importante, fapt ce duce la o puternică inegalizare a tensiunilor pe faze. Acest lucru are de cele mai multe ori efecte negative asupra funcționării receptorului şi de aceea este recomandabil să se ia măsuri pentru reducerea, pe cât posibil, a mărimii respective. Pentru aceasta, soluția cea mai eficientă (şi deci cea mai adoptată) este aceea de folosire a unor conductoare neutre cu o impedanță cât mai mică, $\underline{Z}_0 \rightarrow 0$. În acest scop, conductorul neutru se leagă la pământ, acesta fiind un conductor foarte bun, de impedanță practic neglijabilă.

Prin urmare, firul neutru nu trebuie niciodată întrerupt, motiv pentru care el nu este niciodată prevăzut cu siguranțe fuzibile, aşa cum sunt întotdeauna fazele liniei de alimentare.

Puterea primită de receptor va fi evaluată prin intermediul puterii aparente complexe:

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{1N}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{2N}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{3N}\underline{I}_3^* + \underline{U}_{N0}\underline{I}_0^* = \underline{U}_{10}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{20}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{30}\underline{I}_3^*$$

Separând părțile sale reală şi imaginară, se obțin puterea activă şi reactivă primite de receptor din rețea:

$$P_b = U_{10}I_1\cos\varphi_{10} + U_{20}I_2\cos\varphi_{20} + U_{30}I_3\cos\varphi_{30}$$
$$Q_b = U_{10}I_1\sin\varphi_{10} + U_{20}I_2\sin\varphi_{20} + U_{30}I_3\sin\varphi_{30}$$

În relația de mai sus φ_{k0} ($k=1,2,3$) reprezintă defazajele dintre tensiunile de fază de alimentare $\underline{U}_{k0}$ si intensitățile $\underline{I}_k$ ale fazelor corespunzătoare. Trebuie menționat că termenii sumelor nu au fiecare o semnificație, ci numai suma lor prezintă puterea activă, respectiv reactivă primită pe receptor.

Pe de altă parte, folosind relațiile:

$$\underline{U}_{1N} = \underline{Z}_1\underline{I}_1,\quad \underline{U}_{2N} = \underline{Z}_2\underline{I}_2,\quad \underline{U}_{3N} = \underline{Z}_3\underline{I}_3,\quad \underline{U}_{1N} = \underline{Z}_0\underline{I}_0$$

Expresia puterii aparente devine:

$$\underline{S}_c = \underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \underline{Z}_3 I_3^2 + \underline{Z}_0 I_0^2$$

Părțile sale reală şi imaginară sunt:

$$P_c = \sum_{k=0}^{3} \Re e\{\underline{Z}_k I_k^2\} = \sum_{k=0}^{3} R_k I_k^2; \quad Q_c = \sum_{k=0}^{3} \Im m\{\underline{Z}_k I_k^2\} = \sum_{k=0}^{3} X_k I_k^2$$

Relațiile de mai sus reprezintă puterea activă şi respectiv reactivă, consumate în elementele rezistive şi reactive ale receptorului. Egalitatea acestora cu cele determinate din puterea aparentă complexă reprezintă o bună verificare a rezolvării receptorului (*metoda bilanțului de puteri*).

În cazul circuitelor echilibrate, puterile primite pe fiecare fază în parte sunt egale astfel încât puterile activă, reactivă şi aparentă sunt:

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos\varphi; \quad Q = 3U_f I_f \sin\varphi = \sqrt{3} U_l I_l \sin\varphi; \quad S = 3U_f I_f = \sqrt{3} U_l I_l$$

Receptorul trifazat stea fără fir neutru

În cazul acestui tip de receptor (Fig.3.6) am putea folosi metoda de rezolvare expusă în cazul receptorului trifazat stea fără fir neutru. Într-adevăr, lipsa conductorului neutru este echivalentă cu prezența unui conductor de impedanță infinită, $\underline{Z}_0 \to \infty$ (şi deci $\underline{Y}_0 \to 0$).

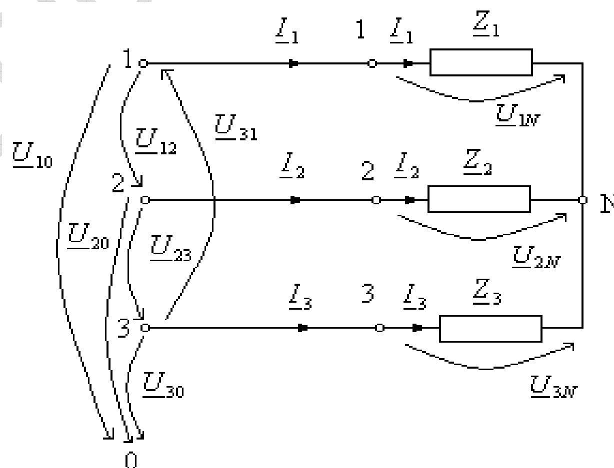


Fig.3.6 Mărimile caracteristice funcționării receptorului trifazat stea

fără fir neutru.

Dacă se cunosc tensiunile de fază la alimentare $\underline{U}_{10}, \underline{U}_{20}, \underline{U}_{30}$ (cu condiția ca neutrul 0 al alimentarii să fie accesibil chiar dacă nu este legat conductiv cu neutrul *N* al sarcinii), se observă că relațiile de calcul ale curenților prin fazele receptorului sunt cele date la receptorul cu fir neutru, singura diferență constând în faptul că deplasarea neutrului se calculează cu relația:

$$\underline{U}_{N0} = \frac{\underline{Y}_1\underline{U}_{10} + \underline{Y}_2\underline{U}_{20} + \underline{Y}_3\underline{U}_{30}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Dacă receptorul este echilibrat şi alimentat simetric, rămân evident valabile unele concluzii şi relații de calcul stabilite în cazul receptorului trifazat cu conductor neutru, când s-a menționat posibilitatea îndepărtării firului neutru.

În cazul receptorului analizat cel mai adesea sunt cunoscute însă tensiunile de linie (între fazele de alimentare) $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$, alcătuind un sistem trifazat simetric.

Deoarece aceste tensiuni formează oricum o buclă închisă, putem spune:

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0 \qquad \text{iar} \qquad \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

Folosind relațiile dintre tensiuni, admitanțe şi curenți precum şi relațiile de mai sus pentru curenții de pe faze se obțin relațiile:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \frac{\underline{Y}_2\underline{U}_{12} - \underline{Y}_3\underline{U}_{31}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \frac{\underline{Y}_3\underline{U}_{23} - \underline{Y}_1\underline{U}_{12}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}; \quad \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \frac{\underline{Y}_1\underline{U}_{31} - \underline{Y}_2\underline{U}_{23}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Pentru calculul de puteri, dacă punctul neutru, 0, al rețelei este accesibil sunt valabile expresiile stabilite în cazul receptorului cu conductor neutru.

Expresia puterii aparente complexe consumată devine : $\underline{S}_c = \underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \underline{Z}_3 I_3^2$

Dacă se dau ca mărimi de linie tensiunile de linie, atunci puterea primită la bornele circuitului este:

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{23}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{31}\underline{I}_3^*; \quad \underline{S}_b = -\underline{U}_{12}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{31}\underline{I}_3^* = -\underline{U}_{23}\underline{I}_3^* + \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* = -\underline{U}_{31}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{23}\underline{I}_1^*$$

Separând părțile reale şi părțile imaginare ale puterii complexe $\underline{S}_b$ se obțin puterile activă şi reactivă căutate.

De menționat că receptoarele trifazate stea fără conductor neutru (de cele mai multe ori echilibrate) se întâlnesc destul de des mai ales sub forma unor diverşi consumatori precum: maşini unelte, motoare asincrone de uz general, cuptoare electrice etc.

Receptorul trifazat cu conexiune triunghi

Mărimile ce caracterizează funcționarea acestui receptor (Fig.3.7) sunt următoarele:

- Intensitățile $\underline{I}_{12}, \underline{I}_{23}, \underline{I}_{31}$ ale curenților din fazele receptorului, $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{23}, \underline{Z}_{31}$ faze de impedanțe, în general diferite (receptor dezechilibrat).
- Intensitățile curenților din conductoarele liniei trifazate de alimentare ai receptorului, numiți *curenți de linie*: $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$.
- Tensiunile pe faza receptorului, evident egale cu tensiunile de linie: $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$, ceea ce justifica şi notarea celorlalte mărimi proprii fazelor receptorului.

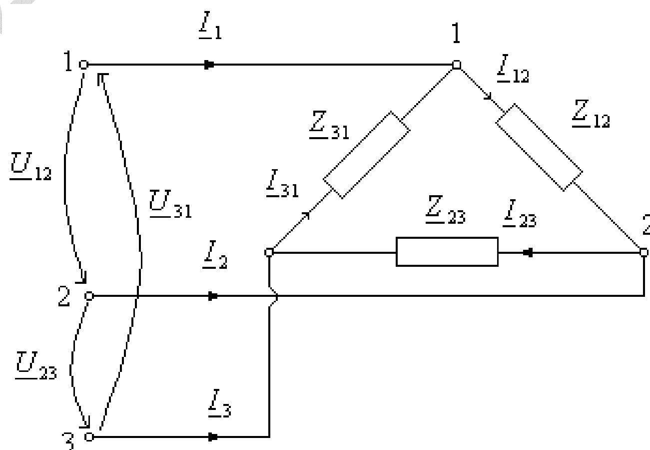


Fig.3.7 Receptorul trifazat în conexiune triunghi; mărimile sale caracteristice.

Rezolvarea receptorului presupune, în general, determinarea curenților de fază şi de linie, cunoscute fiind tensiunile de linie $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$ şi impedanțele $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{23}, \underline{Z}_{31}$ ale fazelor. Intensitățile curenților de fază sunt:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}, \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}, \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$$

Curenții de linie se determina prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff în nodurile triunghiului:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}, \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}.$$

Puterea primită de receptor se determina pornind de la aceeaşi expresie generală:

$$\underline{S}_b = \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{23}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{31}\underline{I}_3^*$$

$$\underline{S}_b = -\underline{U}_{12}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{31}\underline{I}_3^* = -\underline{U}_{23}\underline{I}_3^* + \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* = -\underline{U}_{31}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{23}\underline{I}_1^*$$

După cum se observă, relațiile de mai sus sunt identice cu cele obținute la receptorul stea fără conductor neutru, ceea ce în fond era de aşteptat, ambele tipuri de receptoare având o caracteristică comună: *faptul că le sunt accesibile numai trei borne*.

Pentru identificarea puterilor consumate în elementele receptorului se foloseşte relația:

$$\underline{S}_c = \underline{Z}_{12} I_{12}^2 + \underline{Z}_{23} I_{23}^2 + \underline{Z}_{31} I_{31}^2$$

cu separarea corespunzătoare a puterilor active şi reactive.

De menționat că în cazul receptoarelor echilibrate în conexiune triunghi rămân valabile pentru exprimarea puterilor relațiile determinate în cazul receptoarelor în stea.

3.3 AMELIORAREA FACTORULUI DE PUTERE PENTRU CIRCUITELE TRIFAZATE ÎN REGIM SIMETRIC

Considerăm un receptor trifazat echilibrat (în conexiune triunghi sau stea fără fir neutru care, în regim normal de funcţionare, care primeşte din reţea o putere activă nominală P sub o tensiune nominală (de fază sau de linie) şi un factor de putere $\cos\varphi$ impus de buna sa funcţionare. De asemenea, receptorul trifazat mai poate fi caracterizat şi de un randament η de funcţionare definit în funcţie de puterea sa şi parametrii electrici de funcţionare $\eta = \frac{P}{\sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi} = \frac{P}{3U_f I_f \cos\varphi} = \frac{P}{S\cos\varphi}$. De cele mai multe ori, acest model de consumator răspunde foarte bine unei game foarte largi de aplicaţii practice (instalaţii electrice de putere, motoare electrice, cuptoare electrice etc.).

Factorul de putere al circuitului $(\cos\varphi)$ are o mare importanţă asupra întregului sistem de transmitere a energiei de la furnizor la consumator. Un factor de putere scăzut înseamnă creşterea pierderilor de putere şi de tensiune pe linia electrică de alimentare, dar totodată datorită creşterii intensităţii curentului electric va creşte încălzirea conductoarelor şi deci apare necesitatea supradimensionării instalaţiilor.

Problema prezintă o mare importanţă economică, distribuitorii de energie electrică impun marilor consumatori un anumit factor de putere mediu în utilizarea energiei, folosind sisteme tarifare diferenţiate după modul de realizare a acestui important indicator.

Pentru a reduce solicitările liniei de alimentare a receptorului, la bornele acestuia se leagă diverse baterii de condensatoare (condensatoare de aceeaşi capacitate) fie în conexiune triunghi fie în conexiune stea (Fig.3.8).

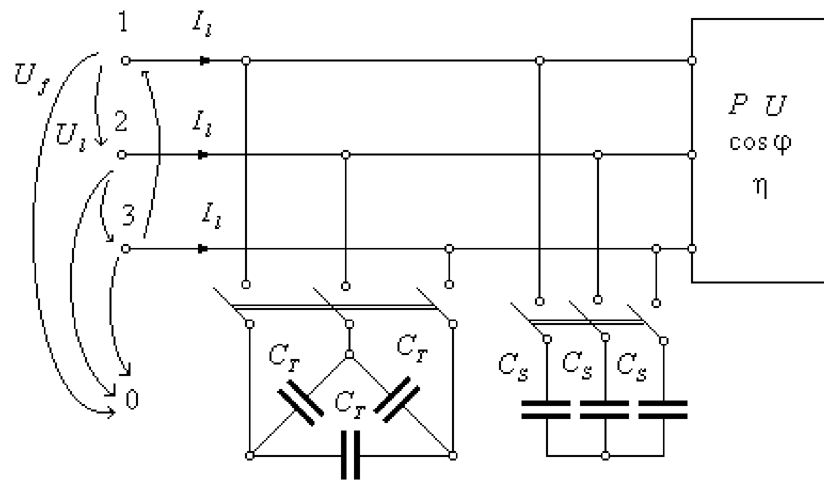


Fig.3.8 Ameliorarea factorului de putere cu ajutorul bateriilor de condensatoare.

Condensatoarele sunt *debitoare* de putere reactivă. Vom considera în cele ce urmează bateria de condensatoare în conexiune triunghi ce are ca element C_T. Puterea reactivă consumată de aceste condensatoare va fi : $Q_C = -3\omega C_T U_l^2$. Receptorul consumă o putere reactivă înainte de montarea bateriei, $Q = P\,\text{tg}\,\varphi$. Puterea solicitată rețelei după montarea condensatoarelor va fi:

$$Q' = Q + Q_c \qquad \text{sau} \qquad P\,\text{tg}\,\varphi' = P\,\text{tg}\,\varphi - 3\omega C_T U_l^2$$

În relația (1.36) $Q' = P\,\text{tg}\,\varphi'$ reprezintă puterea reactivă primită din rețea după conectarea bateriei de condensatoare – puterea activă P rămâne constantă, iar $\cos\varphi'$ este noul factor de putere echivalent a cărui realizare se urmăreşte. Prin urmare, valoarea capacității unui condensator din bateria în triunghi va fi:

$$C_T = \frac{P(\text{tg}\,\varphi - \text{tg}\,\varphi')}{3\omega U_l^2}$$

Se observă că în cazul conexiunii stea a bateriei ar rezulta condensatoare cu o capacitate de trei ori mai mare, deoarece locul lui

U_l ar fi luat de tensiunea $U_f = \frac{U_f}{\sqrt{3}}$. Rezultă $\frac{C_T}{C_S} = \left(\frac{U_f}{U_l}\right)^2 = \frac{1}{3}$ şi, prin urmare, compensarea factorului de putere este o problemă de ordin tehnico-economic, având în vedere faptul că, în joasă tensiune, costul condensatoarelor este proporțional cu capacitatea lor. Acesta este motivul pentru care este preferată conexiunea în triunghi.

Diagrama fazorială corespunzătoare a puterilor s-a reprezentat în Fig.3.9. Interesează acum să evaluăm curenții de linie şi pierderile pe linie înainte şi după montarea bateriei de condensatoare.

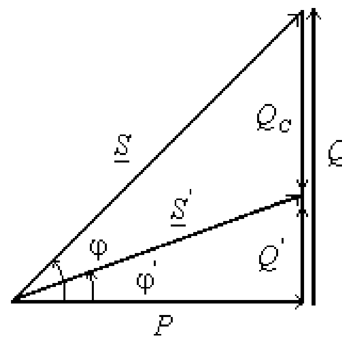


Fig.3.9 Diagrama de putere a circuitului înainte şi după compensarea factorului de putere.

Conform observației anterioare (aşa cum poate fi observat din Fig.3.9) componenta activă a curenților de linie (de ex. puterea activă) rămâne neschimbată, astfel încât noul curent de linie este: $I_l' = I_l \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{I_a}{\cos\varphi'}$ $\frac{I_l'}{I_l} < 1$. Termenul $I_a = I_l \cos\varphi = \frac{P}{\eta\sqrt{3}U_l}$ este componenta *activă* a curentului, adică intensitatea minimă a curentului sub care se poate asigura transmisia puterii P – cazul în care s-ar realiza compensarea integrală a energiei reactive a receptorului ($\cos\varphi' = 1$).

Pierderile pe linia de alimentare Δp sunt direct proporționale cu pătratul intensității curenților de linie astfel încât:

$$\Delta p' = \Delta p\left(\frac{I_l'}{I_l}\right)^2 = \Delta p\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}\right)^2; \qquad \frac{\Delta p'}{\Delta p} < 1.$$

Aşa cum se poate constata, introducerea bateriilor de condensatoare îmbunătățeşte cu mult atât solicitările rețelei, cât şi ale consumatorului. Aceasta este în fapt şi metoda industrială utilizată pentru compensarea factorului de putere: conectarea unor baterii de condensatoare de capacități convenabile reglabile, la bornele unor receptoare de mare putere, puternic inductive.

3.4 CALCULUL CIRCUITELOR TRIFAZATE ECHILIBRATE ÎN REGIMURI SIMETRICE

Definiție. Se numeşte *element trifazat echilibrat* un element trifazat care are proprietatea că aplicarea unui sistem trifazat simetric de mărimi (curenți, tensiuni) de orice succesiune, determinând un sistem simetric de mărimi asociate (tensiuni, curenți) de aceeaşi succesiune. Un circuit este echilibrat dacă este format numai din elemente echilibrate.

În regimuri simetrice ale circuitelor trifazate echilibrate, tensiunile electromotoare, tensiunile şi curenții formează sisteme trifazate simetrice de aceeaşi succesiune. Atunci, pentru a cunoaşte regimul de funcționare a rețelei, este suficient sa se determine mărimile corespunzătoare unei faze, iar mărimile celorlalte două faze se deduc astfel:

– prin defazare cu $2\pi/3$ şi $4\pi/3$ pentru regimul de succesiune directă;

– prin defazare cu $-2\pi/3$ şi $-4\pi/3$ pentru regimul de succesiune inversă;

– fără nici o defazare pentru regimul de succesiune omopolară.

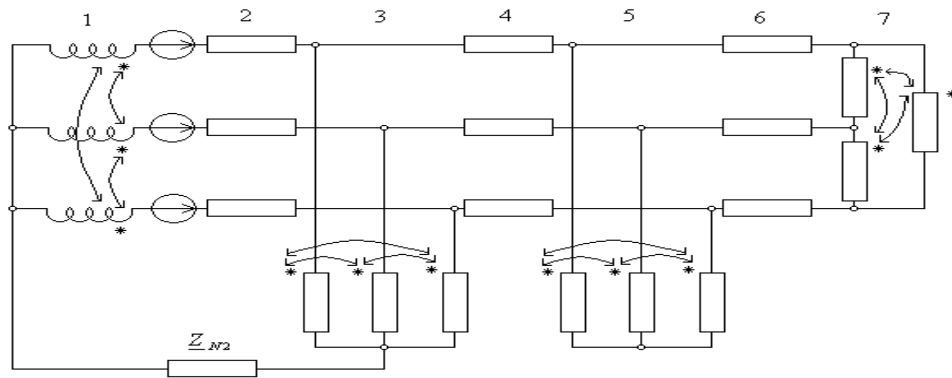


Fig. 3.10 Rețea trifazată echilibrată.

Acest fapt permite o simplificare importantă a calculului circuitelor trifazate echilibrate. Mersul calculului se va exemplifica pentru circuitul din Fig.3.10.

Pentru orice regim simetric, calculul începe prin înlocuirea elementelor trifazate cuplate magnetic între faze prin elemente echivalente necuplate magnetic între faze (Fig.3.11). Atunci fiecare element trifazat echilibrat va fi caracterizat în regimul simetric printr-o singură impedanță:

– impedanța directă - pentru regimul de succesiune directă;

– impedanța inversă - pentru regimul de succesiune inversă;

– impedanța omopolară - pentru regimul de succesiune omopolară.

Mai departe, calculul se desfăşoară în funcție de natura regimului simetric.

Pentru *regimuri simetrice ciclice* (de succesiune directă sau inversă) se continuă astfel:

În primul rând se rețin în schema circuitului numai sursele care vor determina regimul simetric ciclic, adică:

– sursele cu t.e.m. simetrice de succesiune directă pentru regimul de succesiune directă;

– sursele cu t.e.m. simetrice de succesiune inversă pentru regimul de succesiune inversă.

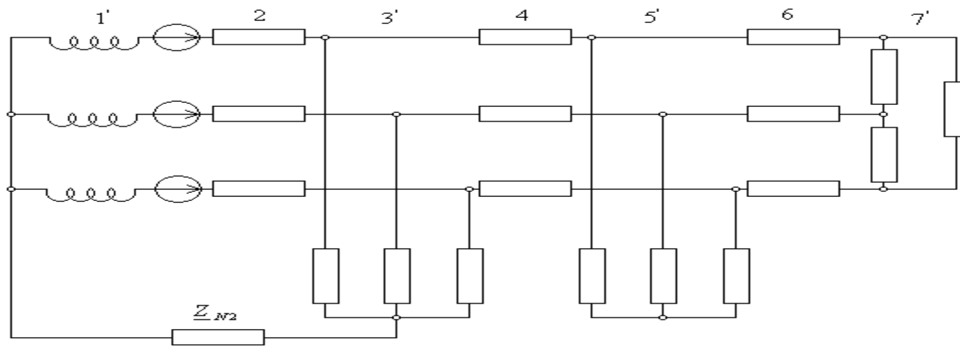


Fig. 3.11 Rețea trifazată echilibrată fără cuplaje magnetice între faze, formată cu impedanțele de fază corespunzătoare regimului simetric.

Apoi se înlocuiesc toate elementele terminale cu conexiune în triunghi prin elemente echivalente conectate în stea. Astfel, toate elementele terminale (fără cuplaje magnetice între faze) vor avea punct neutru (Fig.3.12).

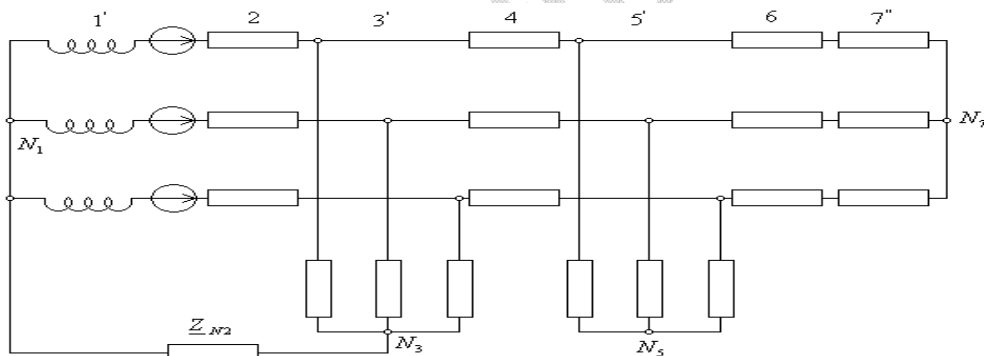


Fig. 3.12 Rețea echilibrată cu toate elementele terminale transfigurate în stea.

Se observă că în regimurile ciclice suma curenților de fază este nulă, însumare care se produce în punctul neutru al fiecărui element terminal conectat în stea (sau echivalat cu conexiune în stea). Atunci punctele neutre ale tuturor elementelor terminale pot fi reunite

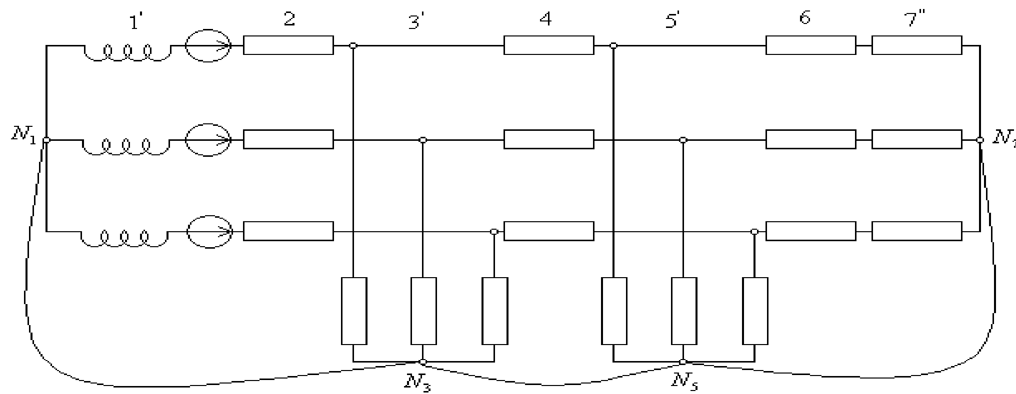


Fig. 3.13. Rețea trifazată echilibrată în regim ciclic. Punctele neutre pot fi conectate între ele printr-un fir de impedanță nulă.

printr-un fir "fictiv", de impedanță foarte mică, tinzând, la limita, spre 0 (Fig.3.13), chiar dacă în circuitul fizic firul de conexiune (dacă există) are o impedanță finită. Prin acest fir "fictiv" nu trece nici un curent, deci toate punctele neutre se aflã la acelaşi potențial.

În urma introducerii firului "fictiv", de impedanță nulă, cele trei circuite de fază devin independente şi funcționarea fiecăruia poate fi studiată pe circuitul monofazat obținut prin îndepărtarea celorlalte două circuite de fază (Fig.3.14).

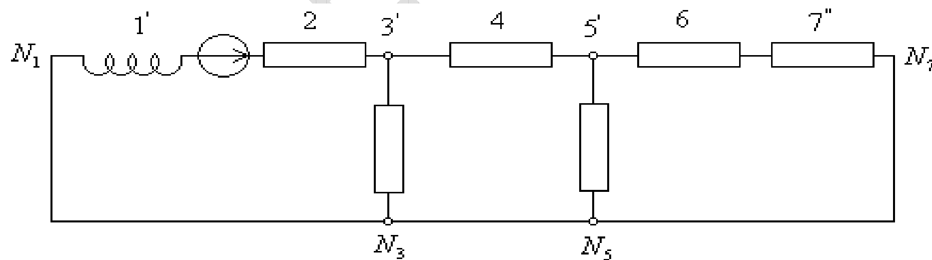


Fig. 3.14. Rețea monofazată obținută după îndepărtarea a două faze.

În concluzie, în regimuri ciclice, rețeaua trifazată echilibrată poate fi rezolvată pe o schemă monofazată (a unei faze, transfigurată în stea), alimentată de sursele unei faze corespunzătoare regimului ciclic studiat şi formată cu elemente pasive având impedanțele corespunzătoare regimului ciclic studiat.

– *Regimul omopolar* se caracterizează prin mărimi egale pe cele trei faze. Pentru ca un sistem de trei curenți de fază egali (şi în faza !) să poată exista, trebuie ca ei sa aibă o cale de închidere. Această posibilitate este oferită numai de conexiunea în stea cu neutru accesibil, suma curenților de fază urmând a se închide prin firul neutru. Conexiunea în stea fără neutru accesibil şi conexiunea în triunghi nu oferă această posibilitate.

Plecând de la observația de mai sus, se procedează astfel.

Se construieşte o nouă rețea, formată numai cu elementele terminale conectate în stea cu fir neutru şi cu liniile de conexiune aferente (Fig. 3.15). Această rețea are ca surse numai pe cele ce determină regimul omopolar, deci t.e.m. egale pe cele trei faze.

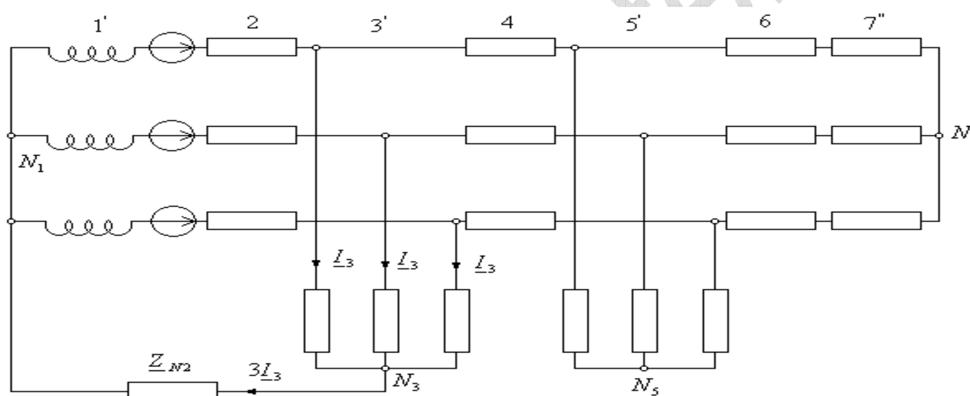


Fig. 3.15. Rețea trifazată echilibrată în regim omopolar.

Se observă că pe firul neutru trece triplul curenților de fază. Dacă pe acest fir se află un element cu impedanța $\underline{Z}_N$, el va determina o cădere de tensiune de 3 ori mai mare decât dacă s-ar afla pe un circuit de fază. Atunci circuitul cu trei faze poate fi rezolvat cu ajutorul schemei unei singure faze şi a firului neutru, în care elementele de pe conductorul neutru apar cu triplul impedanței lor (Fig.3.16).

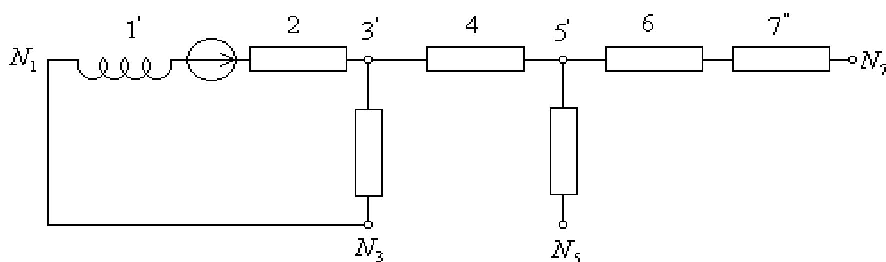


Fig. 3.16. Rețeaua monofazată pentru regimul omopolar.

Observaţie: În cazul în care la aceeaşi rețea trifazată sunt conectate mai multe receptoare, cu conexiune de tip diferit, pentru rezolvarea circuitului este preferabil să se facă mai întâi *transfigurarea receptoarelor stea în receptoare echivalente în conexiune triunghi*. Laturile de acelaşi nume ale tuturor receptoarelor triunghi (reale sau echivalente) fiind legate în paralel, se găseşte un singur receptor echivalent cu conexiune în triunghi al cărui calcul se face conform relațiilor specifice acestui tip de conexiune.

3.5 METODA COMPONENTELOR SIMETRICE

În exploatarea rețelelor electrice se caută întotdeauna alimentarea cu sisteme de tensiuni simetrice si echilibrate, iar repartizarea consumatorilor pe faze se încearcă să se facă in mod egal, spre a evita dezechilibrele majore. Totuşi, de multe ori, in practică, apar regimuri de funcționare nesimetrice, temporare sau de mai lungã durată, la care participã maşini electrice (având cuplaje magnetice între faze şi circuite în mişcare). De asemenea, cauzatoare de nesimetrie sunt defectele pe liniile de alimentare - provocate in general de căderea unei faze sau scurtcircuitarea a doua faze. Asemenea regimuri de funcționare se pot studia avantajos cu ajutorul metodei componentelor simetrice.

Metoda se bazează pe teorema lui Fortescue, privitoare la descompunerea unui sistem nesimetric de mărimi trifazate în trei

sisteme cu componente simetrice şi apoi pe suprapunerea regimurilor de funcționare produse de fiecare sistem simetric in parte. În acest fel studiul regimurilor nesimetrice ale porțiunilor echilibrate de circuite trifazate se reduce la studiul unor regimuri simetrice. Metoda utilizează teorema superpoziției şi ca atare se poate aplica numai circuitelor liniare (sau liniarizate). În continuare, se vor folosi indicii numerici 1, 2, 3 pentru mărimile corespunzătoare celor trei faze.

Teorema lui Fortescue – Un sistem trifazat nesimetric de mărimi poate fi considerat ca suma a trei sisteme de mărimi trifazate simetrice: unul de succesiune directă (d), unul de succesiune inversă (i) şi unul de succesiune homopolară (h).

În baza teoremei lui Fortescue, sistemul mărimilor $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ se descompune în sistemele simetrice: direct $\underline{V}_{d1}$, $\underline{V}_{d2}$, $\underline{V}_{d3}$, invers $\underline{V}_{i1}$, $\underline{V}_{i2}$, $\underline{V}_{i3}$, şi homopolar $\underline{V}_{h1}$, $\underline{V}_{h2}$, $\underline{V}_{h3}$ şi satisface relațiile:

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_{h1} + \underline{V}_{d1} + \underline{V}_{i1};\ \underline{V}_2 = \underline{V}_{h2} + \underline{V}_{d2} + \underline{V}_{i2};\ \underline{V}_3 = \underline{V}_{h3} + \underline{V}_{d3} + \underline{V}_{i3}.$$

Descompunerea în sisteme simetrice este ilustrată în Fig.3.17. Sistemul de mărimi $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ din stânga figurii este descompus în cele trei sisteme simetrice din partea a doua a figurii:

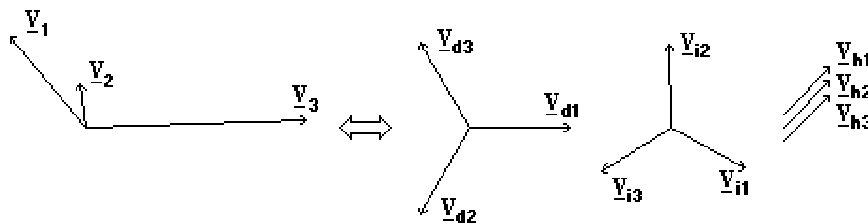


Fig. 3.17. Descompunerea unui sistem trifazat nesimetric în trei sisteme simetrice.

Mărimile fiecărui sistem simetric component se exprimă în funcție de mărimea corespunzătoare fazei 1 a sistemului şi cu ajutorul operatorului complex de rotire cu $2\pi/3$:

Sistemele simetrice se exprimă cu ajutorul următoarelor relații (v. şi Fig.3.18)

$\underline{V}_{h1} = \underline{V}_{h2} = \underline{V}_{h3} = \underline{V}_h$; $\underline{V}_{d1} = \underline{V}_d$, $\underline{V}_{d2} = a^2\,\underline{V}_d$, $\underline{V}_{d3} = a\,\underline{V}_d$; $\underline{V}_{i1} = \underline{V}_i$, $\underline{V}_{i2} = a\,\underline{V}_i$, $\underline{V}_{i3} = a^2\,\underline{V}_i$.

Mărimile fundamentale $\underline{V}_h$, $\underline{V}_d$, $\underline{V}_i$ se numesc *componentele simetrice* (homopolarã, directã, inversã) ale sistemului trifazat de mărimi. Descompunerea sistemului trifazat de mărimi în sistemele componente simetrice se exprimă:

$$\underline{V}_1 = \underline{V}_h + \underline{V}_d + \underline{V}_i,\quad \underline{V}_2 = \underline{V}_h + a^2\,\underline{V}_d + a\,\underline{V}_i,\quad \underline{V}_3 = \underline{V}_h + a\,\underline{V}_d + a^2\,\underline{V}_i.$$

Sistemul de mai sus fiind liniar şi complet, cu determinant nenul, poate fi rezolvat în raport cu componentele simetrice. Descompunerea în componente simetrice este unicã şi totdeauna posibilã. Se obţin relaţiile:

$$\underline{V}_h = (\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3)/3,\quad \underline{V}_d = (\underline{V}_1 + a\,\underline{V}_2 + a^2\,\underline{V}_3)/3,\ \underline{V}_i = (\underline{V}_1 + a^2\,\underline{V}_2 + a\,\underline{V}_3)/3.$$

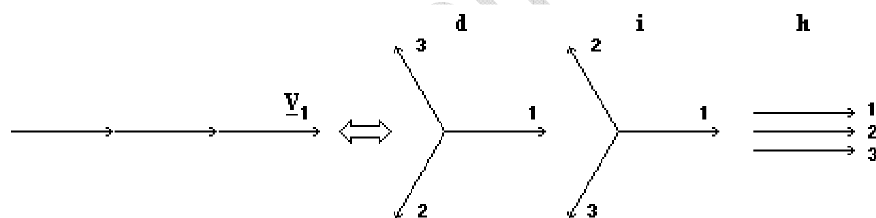


Fig. 3.18 Sistemele simetrice echivalente mărimii monofazate.

Proprietăţi ale componentelor simetrice ale tensiunilor şi curenţilor în circuitele trifazate

Într-un circuit trifazat *fără conductor neutru* suma curenţilor de linie este totdeauna nulã, deci componenta lor homopolarã este nulã la orice nesimetrie.

Dacã existã un *conductor neutru*, curentul acestuia este egal cu suma curenţilor de linie, deci cu triplul componentei homopolare a curenţilor de linie.

Suma *tensiunilor de linie* ale unui sistem trifazat este nulă. Deci componenta homopolară a tensiunilor de linie este nulă.

Componentele directe, respectiv inverse ale tensiunilor de linie sunt *proporționale* cu componentele directe, respectiv inverse ale tensiunilor de fază (ale unui element trifazat terminal). Într-adevăr, rezultă succesiv:

$$\underline{U}_d = (\underline{U}_{12} + a\,\underline{U}_{23} + a^2\,\underline{U}_{31})/3 = (\underline{V}_1 - \underline{V}_2 + a\,(\underline{V}_2 - \underline{V}_3) + a^2\,(\underline{V}_3 - \underline{V}_1))/3 =$$

$$= \underline{V}_d - a^2\,\underline{V}_d = \sqrt{3}\,\underline{V}_d\,e^{j\frac{\pi}{6}},$$

$$\underline{U}_i = (\underline{U}_{12} + a^2\,\underline{U}_{23} + a\,\underline{U}_{31})/3 = (\underline{V}_1 - \underline{V}_2 + a^2\,(\underline{V}_2 - \underline{V}_3) + a\,(\underline{V}_3 - \underline{V}_1))/3 =$$

$$= \underline{V}_d - a\,\underline{V}_d = \sqrt{3}\,\underline{V}_d\,e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Pentru valori efective se poate scrie: $U_{ld} = \sqrt{3}U_{fd}$; $U_{li} = \sqrt{3}U_{fi}$

Aceste relații există şi intre componentele simetrice ale curenților de linie şi de fază la un receptor in triunghi: $I_{ld} = \sqrt{3}I_{fd}$; $I_{li} = \sqrt{3}I_{fi}$ Deci tensiunile de fază ale diferiților consumatori cu conexiunea în stea conectați la o aceeaşi linie trifazată pot diferi unele de altele numai prin componente homopolare.

Tensiunile de fază ale unui receptor echilibrat cu conexiune în stea şi neutru izolat nu au componentă homopolară, întrucât componenta homopolară a curentului este nulă.

Dacă tensiunile de linie sunt simetrice, de succesiune directă, atunci tensiunile de linie nu au componentă inversă, deci nici tensiunile de fază nu au această componentă. În acest caz tensiunile de fază ale unui receptor dezechilibrat vor avea numai componente directe şi homopolare.

Nesimetria sistemelor trifazate de mărimi se apreciază prin:

Gradul de disimetrie este definit ca raportul dintre valoarea efectivă a componentei inverse şi valoarea efectivă a componentei directe $\underline{\varepsilon}_i = \underline{V}_i / \underline{V}_d$.

Gradul de asimetrie este definit ca raportul dintre valoarea efectivă a componentei homopolare şi valoarea efectivă a componentei directe $\underline{\varepsilon}_h = \underline{V}_h \,/\, \underline{V}_d$.

În practică, un sistem de tensiuni sau de curenți este considerat simetric dacă are atât gradul de disimetrie, cât şi gradul de asimetrie mai mic ca 0,05.

Circuite trifazate echilibrate alimentate cu tensiuni nesimetrice

Se consideră in Fig.3.19 un circuit trifazat, format din trei impedanțe $\underline{Z}$ egale, conectate în stea. Sistemul de tensiuni este nesimetric şi se poate descompune sub forma din aceeaşi figură. Se efectuează calculul prin suprapunerea efectelor, descompunând sistemul de alimentare în componentele sale simetrice.

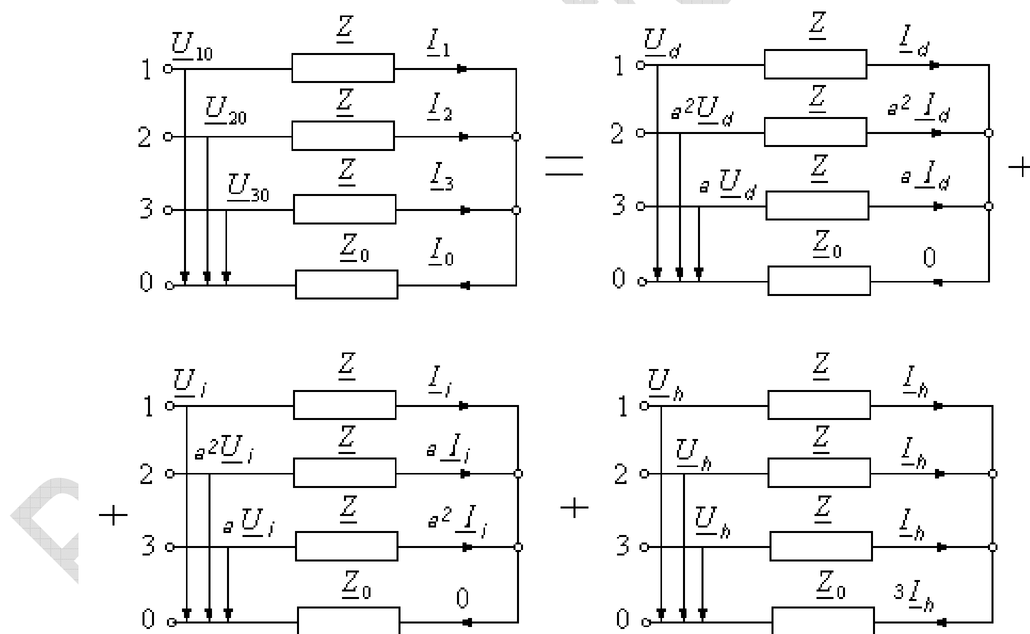


Fig. 3.19

Regimul de funcționare care se stabileşte în schema din Fig. 3.19 poate fi obținut ca suma celor trei regimuri de funcționare care se obțin alimentând pe rând receptorul cu cele trei sisteme simetrice:

direct, invers si homopolar. Aplicând a doua teorema a lui Kirchoff, componentele fundamentale ale sistemelor simetrice de curenți se vor calcula cu relațiile:

$$I_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}}; \qquad I_i = \frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}}; \qquad I_h = \frac{\underline{U}_h}{\underline{Z} + 3\underline{Z}_0}.$$

Schemelor trifazate simetrice de succesiune directă, inversă şi homopolară le corespund schemele echivalente monofilare din Fig. 3.20. Impedanțele corespunzătoare celor trei sisteme simetrice se numesc impedanță directă, inversă şi homopolară.

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}, \qquad \underline{Z}_i = \underline{Z}, \qquad \underline{Z}_h = \underline{Z} + 3\underline{Z}_0.$$

Se remarca faptul ca impedanța firului neutru nu intervine decât in ultima relație.

Practic, pentru rezolvarea unui circuit echilibrat, alimentat cu tensiuni nesimetrice, se face cum s-a arătat mai sus in următoarele etape:

- se determină componentele simetrice ale tensiunilor de fază aplicate receptorului
- se formează schemele de succesiune directă, inversă, homopolară (Fig. 3.20)
- se determină componentele simetrice ale sistemului de curenți
- se calculează curenții nesimetrici ai celor trei faze.

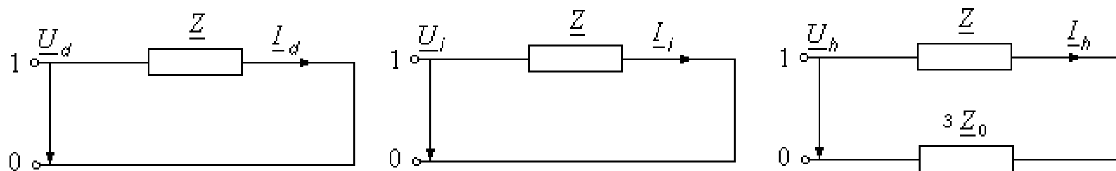


Fig. 3.20

Circuite trifazate dezechilibrate alimentate cu tensiuni nesimetrice

Se consideră circuitul dezechilibrat din Fig. 3.21, având impedanțele fazelor $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ neegale, iar impedanța nulului $\underline{Z}_0$. Sistemul tensiunilor de alimentare este nesimetric, dar se poate descompune in componente simetrice, ale căror valori sunt:

$$\underline{U}_h = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3)/3,\ \underline{U}_d = (\underline{U}_1 + a\,\underline{U}_2 + a^2\,\underline{U}_3)/3,\ \underline{U}_i = (\underline{U}_1 + a^2\,\underline{U}_2 + a\,\underline{U}_3)/3.$$

Se determină curenții celor trei faze, sub forma componentelor simetrice, acestea din urma fiind necunoscute auxiliare:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i,\quad \underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2\,\underline{I}_d + a\,\underline{I}_i,\quad \underline{I}_3 = \underline{I}_h + a\,\underline{I}_d + a^2\,\underline{I}_i.$$

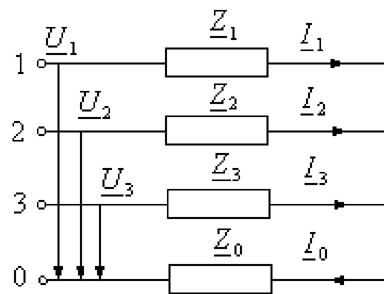


Fig. 3.21

Problema constă în a găsi expresia coordonatelor simetrice ale curenților in funcție de componentele simetrice ale tensiunilor de alimentare si de impedanțele din schema.

Teorema întâi a lui Kirchhoff aplicată in nodul 0 conduce la:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3\,\underline{I}_h$$

Aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff, se stabilesc relațiile:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1\,\underline{I}_1 + \underline{Z}_0\,\underline{I}_0 = \underline{Z}_1(\underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i) + 3\,\underline{Z}_0\,\underline{I}_h;\qquad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2\,\underline{I}_2 + \underline{Z}_0\,\underline{I}_0 = \underline{Z}_2(\underline{I}_h + a^2\,\underline{I}_d + a\,\underline{I}_i) + 3\,\underline{Z}_0\,\underline{I}_h$$

$$\underline{U}_3 = \underline{Z}_3\,\underline{I}_3 + \underline{Z}_0\,\underline{I}_0 = \underline{Z}_3(\underline{I}_h + a\,\underline{I}_d + a^2\,\underline{I}_i) + 3\,\underline{Z}_0\,\underline{I}_h$$

Înlocuind curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, $\underline{I}_0$ în relațiile de mai sus se obține:

$\underline{U}_h = 1/3(9\underline{Z}_0 + \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_h + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\underline{I}_i$

$\underline{U}_d = 1/3(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)\underline{I}_h + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}_i$

$\underline{U}_i = 1/3(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}_h + (\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)\underline{I}_d + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)\underline{I}_i$

Dacă se notează :

$\underline{Z}_h = 1/3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)$; $\underline{Z}_d = 1/3(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3)$; $\underline{Z}_i = 1/3(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3)$,

sistemul de mai sus capătă forma:

$\underline{U}_h = (3\underline{Z}_0 + \underline{Z}_h)\underline{I}_h + \underline{Z}_i\underline{I}_d + \underline{Z}_d\underline{I}_i$; $\underline{U}_d = \underline{Z}_d\underline{I}_h + \underline{Z}_h\underline{I}_d + \underline{Z}_i\underline{I}_i$; $\underline{U}_i = \underline{Z}_i\underline{I}_h + \underline{Z}_d\underline{I}_d + \underline{Z}_h\underline{I}_i$

Dacă se rezolvă sistemul se obțin valorile curenților $\underline{I}_h$, $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$ rezultând apoi curenții din fazele receptorului.

Practic, rezolvarea rețelelor dezechilibrate alimentate cu tensiuni nesimetrice, prin metoda componentelor simetrice, se face în următoarele etape:

- se găsesc componentele simetrice ale sistemului trifazat de tensiuni de alimentare
- se găsesc componentele simetrice ale impedanțelor
- se deduc valorile $\underline{I}_h$, $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$
- se calculează curenții în cele trei faze $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$.

3.6 CALCULUL REGIMURILOR DE AVARIE NESIMETRICE ALE UNOR REŢELE TRIFAZATE ECHILIBRATE

În rețelele trifazate echilibrate pot apare regimuri de avarie nesimetrice de felul: scurtcircuit între o fază şi pământ (nul), între două faze, cu sau fără punere la pământ, întreruperea unei faze sau a două faze (a unui conductor de linie sau a două conductoare de linie). Calculul acestor regimuri de funcționare nesimetrice prezintă importanță deosebită pentru dimensionarea protecției rețelelor electrice trifazate.

Nesimetria corespunzătoare defectelor (avariilor) enumerate mai sus este echivalentă cu prezența unor receptoare dipolare dezechilibrate simple. Pentru acestea se obțin relații mai simple decât cele stabilite în subcapitolul precedent. Cum va rezulta, relațiile care rezultă în asemenea cazuri între componentele simetrice ale tensiunilor şi curenților la locul nesimetriei pot fi satisfăcute printr-o anumită interconexiune a rețelelor de diferite succesiuni (directă, inversă, homopolară). Cele trei rețele vor fi desemnate cu simbolurile R_d, R_i, R_h.

Regimurile de avarie nesimetrice ale rețelelor trifazate echilibrate, enumerate anterior, pot fi studiate cu ajutorul a două scheme tipice, care se vor examina în cele ce urmează.

<u>a) Receptor monofazat</u>

Se consideră un receptor monofazat de impedanță $\underline{Z}$, conectat între bornele A_1B_1 ale rețelei (Fig. 3.22). La locul nesimetriei se pot scrie următoarele relații

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}\,\underline{I}_1 \quad \text{şi} \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_3 = 0.$$

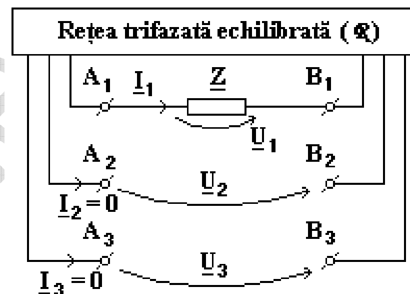


Fig. 3.22 Notații pentru rețeaua trifazată echilibrată cu receptor local monofazat.

Din ultimele relații între curenți rezultă egalitatea celor trei componente simetrice ale curenților

$\underline{I}_d = \underline{I}_i = \underline{I}_h = \underline{I}/3$, iar din prima ecuație rezultă $\underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_h = 3\,\underline{Z}\,\underline{I}_d$.

Relațiilor de mai sus le corespunde conectarea în serie a celor trei rețele ale componentelor simetrice şi închiderea circuitului astfel format pe un element cu impedanța $3\,\underline{Z}$ (Fig.3.23).

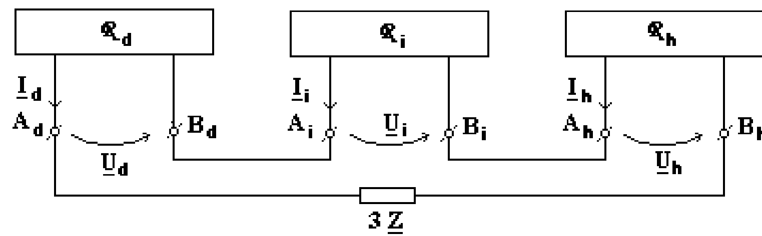


Fig. 3.23 Conectarea în serie a rețelelor componentelor simetrice.

Prin particularizare, cu această schemă de defect se poate studia în primul rând scurtcircuitul monofazat la pământ (nul), cu sau fără arc (impedanță). În acest caz tensiunile $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ sunt tensiuni de fază, $\underline{Z}$ este impedanța arcului de punere la pământ, iar bornele B_1, B_2, B_3 sunt reunite şi formează borna neutră.

Curentul la locul defectului va fi:

$$\underline{I}_1 = 3\underline{I}_d = 3\frac{\underline{U}_{d0} + \underline{U}_{i0} + \underline{U}_{h0}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h + 3\underline{Z}},$$

cu notațiile folosite în subcapitolul precedent.

În particular, pentru scurtcircuitul net la pământ ($\underline{Z} = 0$) al unei rețele trifazate cu tensiuni de fază $\underline{V}$ simetrice înainte de defect, rezultă *curentul de scurtcircuit monofazat*:

$$\underline{I}_{1sc1} = \frac{3\underline{V}}{\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h}.$$

Tot cu această schemă se poate studia regimul de funcționare al rețelei cu două conductoare de linie întrerupte. În acest caz se observă că apariția unui curent ($\underline{I}_1$) la locul defectului (de fapt, în conductorul de linie neavariat) este condiționată de existența unor legături la conductorul neutru (la pământ) a ambelor secțiuni de rețea echilibrată (conectate la bornele A, respectiv B), pentru ca impedanța rețelei componentei homopolare să fie finită ($\underline{Z}_h < \infty$).

b) Receptoare dipolare egale pe două faze

Două elemente de impedanță $\underline{Z}$ se conectează la bornele A_2B_2 şi A_3B_3 (Fig. 3.24). La locul nesimetriei se pot scrie relațiile

$$\underline{I}_1 = 0, \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}\,\underline{I}_2, \quad \underline{U}_3 = \underline{Z}\,\underline{I}_3.$$

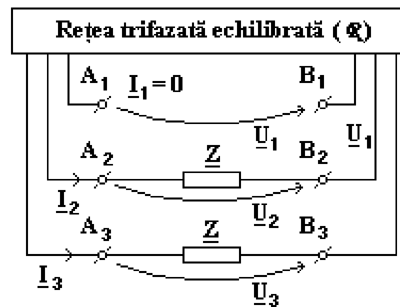


Fig. 3.24 Notații pentru rețeaua trifazată echilibrată cu receptoare dipolare egale pe două faze.

Exprimând aceste relații cu ajutorul componentelor simetrice se obțin expresiile:

$$\underline{I}_d + \underline{I}_i + \underline{I}_h = 0, \quad \underline{U}_h + a^2\,\underline{U}_d + a\,\underline{U}_i = \underline{Z}\,(\underline{I}_h + a^2\,\underline{I}_d + a\,\underline{I}_i), \quad \underline{U}_h + a\,\underline{U}_d + a^2\,\underline{U}_i = \underline{Z}\,(\underline{I}_h + a\,\underline{I}_d + a^2\,\underline{I}_i).$$

Eliminând succesiv din ultimele două relații câte o componentă simetrică a tensiunilor, se obțin relațiile

$$\underline{U}_h - \underline{Z}\,\underline{I}_h = \underline{U}_d - \underline{Z}\,\underline{I}_d = \underline{U}_i - \underline{Z}\,\underline{I}_i.$$

Ținând seama de relația între curenți, acestor relații le corespunde schema de interconexiune a schemelor componentelor simetrice din Fig.3.25: fiecare rețea este înseriată cu un element de impedanță $\underline{Z}$, iar ansamblele rezultate sunt conectate în paralel.

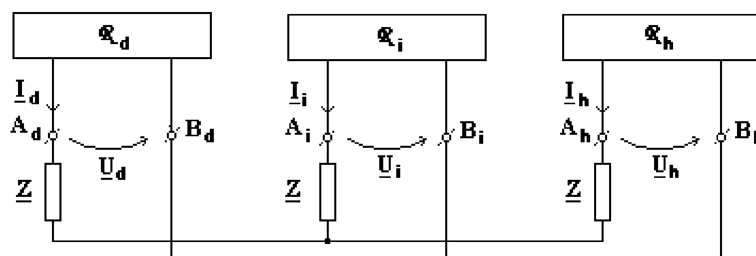


Fig.3.25 Conectarea în paralele a rețelelor componentelor simetrice.

Prin particularizare, cu această schemă se poate studia scurtcircuitul bifazat, cu sau fără impedanță de arc, scurtcircuitul bifazat cu punere la pământ (nul), cu sau fără impedanță de arc şi regimul de avarie rezultat la întreruperea unui conductor de linie.

De exemplu, în cazul scurtcircuitului bifazat fără punere la pământ se consideră că bornele B_1, B_2, B_3 corespund unui receptor echilibrat de impedanță nulă, nelegat la neutru, având deci impedanța homopolară infinită, iar impedanțele directe şi inverse nule. Arcul are impedanța 2 $\underline{Z}$. În acest caz componentele simetrice ale curenților se calculează considerând întreruptă rețeaua componentei homopolare ($\underline{I}_h$ = 0). Dacă rețeaua avea înainte de scurtcircuit tensiunile de fază $\underline{V}$ simetrice, rezultă:

$$\underline{I}_{\mathrm{d}} = -\underline{I}_{\mathrm{i}} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_{\mathrm{d}} + \underline{Z}_{\mathrm{i}} + 2\underline{Z}}.$$

Curentul de scurtcircuit bifazat cu impedanța de arc $\underline{Z}_a$ este:

$$\underline{I}_{2\mathrm{sc}2} = -\underline{I}_{3\mathrm{sc}2} = -\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}\underline{V}}{\underline{Z}_{\mathrm{d}} + \underline{Z}_{\mathrm{i}} + \underline{Z}_{\mathrm{a}}}.$$

La $\underline{Z}_a$ = 0 se obține curentul de scurtcircuit bifazat net.

În cazul scurtcircuitului bifazat cu punere la pământ printr-o impedanță $\underline{Z}_N$, se consideră reunite bornele B_1, B_2, B_3 (receptor echilibrat de impedanță nulă) şi conectate la neutru prin impedanța $\underline{Z}_N$; deci receptorul din B are impedanțele directe şi inverse nule, iar impedanța homopolară egală cu 3 $\underline{Z}_N$. Schema pentru calculul componentelor simetrice ale curenților va fi cea din Fig. 3. 26, în care R'_d, R'_i, R'_h sunt numai porțiunile din rețelele componentelor simetrice corespunzătoare părții din stânga (bornele A) a rețelei trifazate. Rețeaua homopolară apare înseriată cu un element de impedanță 3 $\underline{Z}_N$.

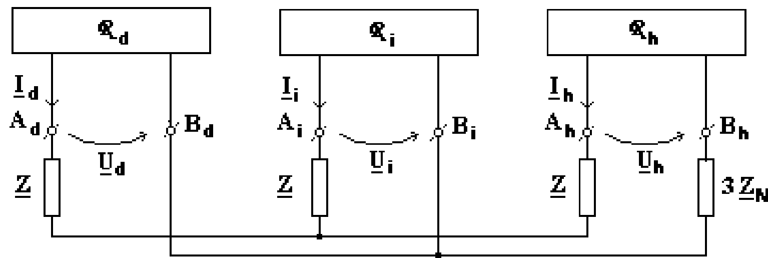


Fig. 3. 26 Schema corespunzātoare scurtcircuitului bifazat cu punere la pământ.

Pentru o rețea cu tensiunile de fază $\underline{V}$ simetrice înainte de avarie se obține:

$$\underline{I}_{\mathrm{d}} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_{\mathrm{d}} + \underline{Z} + \dfrac{(\underline{Z}_{\mathrm{i}} + \underline{Z})(\underline{Z}_{\mathrm{h}} + \underline{Z} + 3\underline{Z}_{\mathrm{N}})}{\underline{Z}_{\mathrm{i}} + \underline{Z}_{\mathrm{h}} + 2\underline{Z} + 3\underline{Z}_{\mathrm{N}}}}$$

şi apoi

$$\underline{I}_{\mathrm{i}} = -\frac{\underline{Z}_{\mathrm{h}} + \underline{Z} + 3\underline{Z}_{\mathrm{N}}}{\underline{Z}_{\mathrm{i}} + \underline{Z}_{\mathrm{h}} + 2\underline{Z} + 3\underline{Z}_{\mathrm{N}}}\underline{I}_{\mathrm{d}}, \quad \underline{I}_{\mathrm{h}} = -\frac{\underline{Z}_{\mathrm{i}} + \underline{Z}}{\underline{Z}_{\mathrm{i}} + \underline{Z}_{\mathrm{h}} + 2\underline{Z} + 3\underline{Z}_{\mathrm{N}}}\underline{I}_{\mathrm{d}}.$$

Pentru scurtcircuitul net ($\underline{Z} = \underline{Z}_N = 0$) se obțin expresiile:

$$\underline{I}_{\mathrm{d}} = \frac{\underline{V}}{\underline{Z}_{\mathrm{d}} + \underline{Z}_{\mathrm{i}}\underline{Z}_{\mathrm{h}}/(\underline{Z}_{\mathrm{i}} + \underline{Z}_{\mathrm{h}})}, \quad \underline{I}_{\mathrm{i}} = -\frac{\underline{Z}_{\mathrm{h}}}{\underline{Z}_{\mathrm{i}} + \underline{Z}_{\mathrm{h}}}\underline{I}_{\mathrm{d}}, \quad \underline{I}_{\mathrm{h}} = -\frac{\underline{Z}_{\mathrm{i}}}{\underline{Z}_{\mathrm{i}} + \underline{Z}_{\mathrm{h}}}\underline{I}_{\mathrm{d}}.$$

Din aceste componente se pot calcula curenții de linie.

Este interesant de observat cā dacā impedanțele inverse şi homopolare au acelaşi argument (de exemplu, sunt pur reactive), atunci intensitāțile curenților de scurtcircuit rezultā egale pe cele douā faze.

Pentru a studia regimul de avarie corespunzător întreruperii unui conductor de linie, se foloseşte schema din Fig. 3.24, în care $\underline{Z}$ este impedanța unui conductor de linie (poate fi şi nulā). În acest caz la bornele B_1, B_2, B_3 se considerā conectatā rețeaua receptoare echilibratā. Dacā aceasta nu are conductor neutru sau receptoare conectate în stea cu legāturā la neutru, va rezulta $\underline{Z}_h \to \infty$ şi schema se

simplifică, fiind aceeaşi ca la scurtcircuitul bifazat prin impedanţă, iar curenţii sunt daţi de relaţiile determinate în cazul anterior.

Observaţie. Este interesant de comparat intensităţile curenţilor de scurtcircuit net monofazat, bifazat şi trifazat:

$$\text{- monofazat } I_{sc1} = \frac{3V}{|\underline{Z}_d + \underline{Z}_i + \underline{Z}_h|}, \quad \text{- bifazat}: I_{sc2} = \frac{\sqrt{3}V}{|\underline{Z}_d + \underline{Z}_i|}, \quad \text{- trifazat}: I_{sc3} = \frac{V}{|\underline{Z}_d|}.$$

Întrucât, de regulă în regim permanent la generatoarele sincrone există relaţiile, $|\underline{Z}_d| >> |\underline{Z}_i| > |\underline{Z}_h|$, cel mai mare rezultă curentul de scurtcircuit monofazat, iar apoi urmează cel de scurtcircuit bifazat, iar cel mai mic este curentul de scurtcircuit trifazat. Dacă se neglijează valorile impedanţelor inversă şi homopolară în raport cu cea directă, atunci la generatoarele sincrone în regim permanent cei trei curenţi de scurtcircuit au valori în proporţia:

$$I_{sc1} : I_{sc2} : I_{sc3} = 3 : \sqrt{3} : 1.$$

În regim tranzitoriu şi/sau în reţele electrice aceste proporţii se modifică.

3.7 CALCULUL PUTERII IN CIRCUITE TRIFAZATE CU AJUTORUL COMPONENTELOR SIMETRICE

Puterea aparentă complexă intr-un sistem trifazat nesimetric este data de relaţia:

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^*,$$

Introducând componentele simetrice ale tensiunilor de fază:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_h + \underline{U}_d + \underline{U}_i, \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_h + a^2 \underline{U}_d + a \underline{U}_i, \quad \underline{U}_3 = \underline{U}_h + a \underline{U}_d + a^2 \underline{U}_i.$$

Şi componentele simetrice ale curenţilor conjugaţi $\left[(a^2)^* = a; a^* = a^2\right]$

$$\underline{I}_1^* = \underline{I}_h^* + \underline{I}_d^* + \underline{I}_i^*; \quad \underline{I}_2^* = \underline{I}_h^* + a \underline{I}_d^* + a^2 \underline{I}_i^*; \quad \underline{I}_3^* = \underline{I}_h^* + a^2 \underline{I}_d^* + a \underline{I}_i^*$$

Şi ținând cont de relațiile: $a^3 = 1;\quad a^4 = a;\quad 1 + a + a^2 = 0$ relația de calcul a puterii aparente devine:

$$\underline{S} = 3\ \underline{U}_h\ \underline{I}_h^* + 3\ \underline{U}_d\ \underline{I}_d^* + 3\ \underline{U}_i\ \underline{I}_i^*,$$

Puterile active si reactive vor fi deci:

$$P = 3\ U_h\ I_h \cos\varphi_h + 3\ U_d\ I_d \cos\varphi_d + 3\ U_i\ I_i \cos\varphi_i,$$

$$Q = 3\ U_h\ I_h \sin\varphi_h + 3\ U_d\ I_d \sin\varphi_d + 3\ U_i\ I_i \sin\varphi_i.$$

Relațiile anterioare arată că puterea activă, respectiv reactivă, a unui circuit trifazat e egală cu suma puterilor corespunzătoare sistemelor simetrice de aceleaşi nume ale curenților şi tensiunilor.

4.

CIRCUITE ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

4.1 GENERALITĂŢI

În acest capitol se urmăreşte analizarea circuitelor electrice liniare în care semnalele de excitație aplicate au o variație în timp periodică oarecare.

Utilitatea unei astfel de analize constă în faptul că în marea majoritate a cazurilor practice circuitele electrice funcționează tocmai într-un asemenea regim, fie datorită unor semnale de excitație a căror formă de variație în timp se îndepărtează (mai mult sau mai puțin) de la o sinusoidă, fie datorită caracterului neliniar al elementelor de circuit componente (bobina cu miez de fier saturat, redresoare etc.).

Ca urmare, curenții şi tensiunile din circuit au la rândul lor o variație în timp nesinusoidală, lucru care duce de obicei la înrăutățirea funcționării echipamentelor şi instalațiilor (pierderi suplimentare de energie, supratensiuni sau supracurenți). Trebuie menționat că sunt şi situații în care un asemenea regim este produs în mod voit – este cazul unor instalații de telecomunicații şi automatizări.

Trebuie precizat faptul că, dacă semnalele de excitație aplicate nu au componentă continuă, regimul permanent de funcționare al circuitului se numeşte *curent alternativ nesiunusoidal*.

4.2 FUNCŢII PERIODICE

Calculul circuitelor electrice liniare sau aproximate prin elemente liniare se face de obicei pe baza descompunerii în serii Fourier a tensiunii electromotoare surselor de tensiune, a intensității curenților surselor de curent, a tensiunii aplicate periodice şi a aplicării superpoziției.

Orice funcție periodică $f(t) = f(t + kT)$ care satisface condițiile Dirichlet (este mărginită şi are un număr finit de discontinuități şi extreme pe durata T a unei perioade) poate fi descompusă într-o serie Fourier, adică într-o sumă infinită de sinusoide având frecvențele multiplii întregi ai frecvenței de bază $f = 1/T$ a funcției.

Descompunerea respectivă conține şi un termen constant care reprezintă componenta continuă a funcției.

Seria Fourier echivalentă a funcției periodice $f(t)$ se scrie:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{km} \sin k\omega t + C_{km} \cos k\omega t) \tag{4.1}$$

În relația de mai sus coeficienții dezvoltării se calculează cu relațiile:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad B_{km} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}t \qquad C_{km} = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

Aceeaşi dezvoltare poate fi rearanjată sub forma:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega t + \varphi_k) \tag{4.3}$$

În care:

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2} \qquad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{B_{km}}{C_{km}} \tag{4.4}$$

De menţionat că, majoritatea funcţiilor întâlnite în tehnica dezvoltării în serie Fourier, se pot aproxima prin primii 3, 5 cel mult 10 termeni.

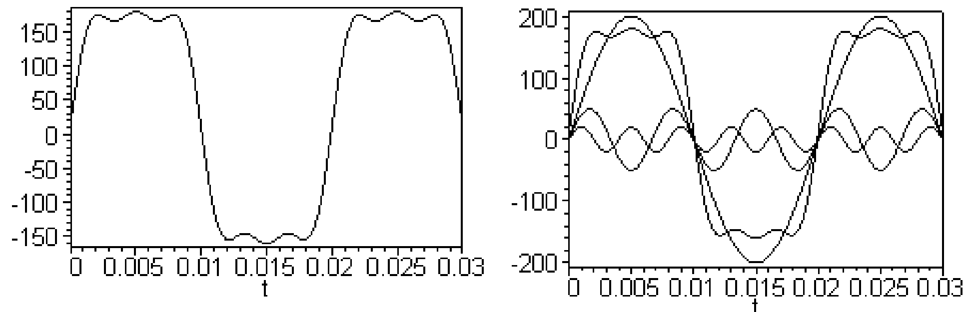


Fig.4.1 Descompunerea unei funcţii periodice în serie Fourier cu trei termeni.

Pentru funcţiile periodice care se bucură de anumite proprietăţi particulare de simetrie, seria Fourier corespunzătoare are unii coeficienţi nuli.

Astfel:

1) *<u>Funcţia alternativă</u>* , adică funcţia care are valoare medie nulă: $\langle f(x) \rangle = 0$, nu are componentă continuă: $A_0 = 0$;

2) *<u>Funcţia impară</u>*, $f(-t) = -f(t)$, nu are decât termeni în sinus în dezvoltarea de bază (3.1) : $A_0 = 0; \quad C_{km} = 0$;

3) *<u>Funcţia pară</u>*, $f(-t) = f(t)$, nu are termeni în sinus în dezvoltarea de bază dată de relaţia (3.1) : $B_{km} = 0$;

4) *<u>Funcţia alternativ-simetrică</u>*, $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$ nu are decât armonici impare: $A_0 = 0; \quad B_{2k,m} = C_{2k,m} = 0$

4.3 MĂRIMI CARACTERISTICE

Considerăm o mărime periodică *x(t)* dezvoltată în serie Fourier de forma:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin(k\omega t + \varphi_k) \tag{4.5}$$

1) **valoarea medie** se defineşte:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0+T}^{T} x(t)\,\mathrm{d}\,t = X_0 \tag{4.6}$$

2) **valoarea efectivă**:

$$X = \sqrt{X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} X_k^2} \tag{4.7}$$

3) **componenta alternativă** a mărimii este definită ca valoarea efectivă a tuturor armonicilor dezvoltării:

$$X_a = \sqrt{X^2 - X_0^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2} \tag{4.8}$$

4) **reziduul deformant** este definit ca valoare efectivă a tuturor armonicilor superioare ale dezvoltării:

$$X_d = \sqrt{X^2 - X_0^2 - X_1^2} = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} X_k^2} \tag{4.9}$$

5) **coeficientul de distorsiune,** definit ca raportul dintre reziduul deformant X_d şi valoarea efectivă a componentei alternative a mărimii X_a:

$$k_d = \frac{X_d}{X_a} = \sqrt{\frac{X^2 - X_0^2 - X_1^2}{X^2 - X_0^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} X_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} X_k^2}} \tag{4.10}$$

6) **factorul de vârf,** definit ca raportul dintre valoarea de vârf a mărimii (valoarea maximă atinsă în decursul unei perioade) $\hat{x}$ şi valoarea sa efectivă:

$$k_v = \frac{\hat{x}}{X} \tag{4.11}$$

7) **factorul de formă**, definit ca raportul dintre valoarea efectivă a mărimii şi valoarea sa medie redresată:

$$k_f = \frac{X}{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|\,\mathrm{d}t} \tag{4.12}$$

Ultimii doi factori sunt proprii funcţiilor periodice alternative şi simetrice.

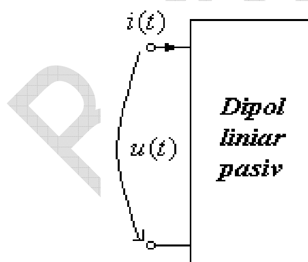
Toate mărimile mai sus definite realizează o apreciere cantitativă asupra "*calităţii*" semnalelor electrice.

Astfel, spre exemplu, în electro-energetică, o mărime sinusoidală este considerată alternativă dacă coeficientul de distorsiune $k_d \leq 5\%$.

4.4 PUTERI ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Puterile prezentate în acest regim dezvoltă puterile introduse la circuitele dipolare funcţionând în regim periodic nesinusoidal.

Pentru aceasta vom considera un dipol receptor liniar, necuplat magnetic cu exteriorul ale cărui mărimi de intrare sunt:



$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \varphi_{U_k})$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \varphi_{I_k})$$

Fig.4.2 Dipol electric liniar în regim periodic nesinusoidal.

Se va nota cu $\varphi_k = \varphi_{U_k} - \varphi_{I_k}$, defazajul armonicii de ordin k a curentului faţă de armonica corespunzătoare tensiunii.

Se definesc următoarele puteri:

1) **Puterea instantanee** – indiferent de variația în timp a tensiunii şi a curentului, exprimată prin relația :

$$p(t) = u(t)i(t) \tag{4.13}$$

2) **Puterea activă –** ca şi în cazul regimului de curent alternativ se defineşte cu relația:

$$P = \langle ui \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T ui \,\mathrm{d}\,t = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_K I_k \cos\varphi_k \quad [\mathrm{W}] \tag{4.14}$$

Prin urmare, în regim periodic nesinusoidal puterea activă este egală cu suma puterilor active corespunzătoare tuturor armonicilor, inclusiv a celei de ordin zero (puterea de curent continuu).

3) **Puterea reactivă –** în regim periodic nesinusoidal se defineşte, prin analogie, ca suma puterilor reactive corespunzătoare tuturor armonicilor:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_K I_k \sin\varphi_k \quad [\mathrm{VAR}] \tag{4.15}$$

4) **Puterea aparentă** – în regim periodic nesinusoidal se defineşte ca produsul dintre valorile efective ale curentului absorbit şi ale tensiunii aplicate dipolului:

$$S = UI = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2\right)} \quad [\mathrm{VA}] \tag{4.16}$$

Din relațiile (4.14)-(4.16) se poate observa că, spre deosebire de regimul periodic sinusoidal în care era valabilă egalitatea: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, de această dată cele trei puteri anterior definite satisfac inegalitatea: $S > \sqrt{P^2 + Q^2}$.

Acest fapt sugerează introducerea unei noi puteri specifice regimului periodic nesinusoidal – *puterea deformantă.*

5) **Puterea deformantă** – se defineşte ca un complement al puterilor activă şi reactivă în raport cu puterea aparentă:

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad [\text{VAD}] \tag{4.17}$$

Unitatea de măsură pentru puterea deformantă este *vad* (volt-amper deformant).

Se defineşte şi în acest regim **factorul de putere** definit ca şi în cazul regimului periodic sinusoidal ca raportul dintre puterea activă şi puterea aparentă, fiind întotdeauna subunitar.

$$k_P = \frac{P}{S} < 1 \tag{4.18}$$

Cu toate că în acest regim nu se poate defini o putere complexă care să conțină puterea activă şi reactivă, se poate face un bilanț al puterilor calculând pentru fiecare sursă de energie puterea activă si reactivă debitată (pe fiecare armonică), ea având aceeaşi valoare cu puterea (activă si reactivă) consumată (absorbită) de fiecare element pe fiecare armonică.

La armonica de ordin zero puterile sunt ca şi în curent continuu, iar pentru armonicele de ordin superior se calculează ca şi în regimul periodic sinusoidal pentru fiecare armonică în parte.

4.5 ELEMENTE IDEALE DE CIRCUIT ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

Vom analiza pe rând comportarea elementelor ideale de circuit, presupunând aplicată la bornele lor o tensiune alternativă nesinusoidală de forma:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \alpha_k) \tag{4.19}$$

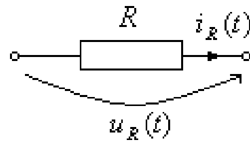
şi propunându-se determinarea curbei de variație în timp a curentului sub forma descompunerii sale în serie Fourier:

$$i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \alpha_k - \varphi_k) \tag{4.20}$$

în care valorile efective I_k şi defazajele φ_k trebuie determinate pentru fiecare armonică în parte.

1) **Rezistorul ideal**.

Ecuaţia generală a rezistorului este : $u = Ri$



$$I_k = \frac{1}{R} U_k \qquad \varphi_k = 0 \qquad I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} = \frac{1}{R}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} = \frac{U}{R}$$

Prin urmare $k_{d,i} = k_{d,u}$, ceea ce arată că intensitatea curentului şi tensiunea aplicată au aceeaşi formă de variaţie în timp.

Puterile consumate de rezistor vor fi:

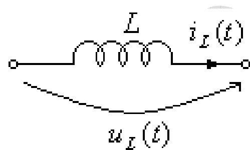
$$P = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k = R\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2 = RI^2 \qquad Q = 0;\;\; S = UI = RI^2;\;\; D = 0 \tag{4.21}$$

Rezultatele mai sus precizate rămân valabile şi pentru cazul în care tensiunea aplicată la intrare are componentă continuă.

2) **Bobina ideală**.

Ecuaţia de funcţionare a acesteia:

$$i = \frac{1}{C}\int u\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k}{k\omega L}\sqrt{2}\sin\left(k\omega t + \alpha_k - \frac{\pi}{2}\right)$$



$$I_k = \frac{1}{k\omega L} U_k \qquad \varphi_k = \frac{\pi}{2} \qquad I = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2} = \frac{1}{\omega L}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_k^2}{k^2}} < \frac{1}{\omega L}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_k^2} = \frac{U}{\omega L}$$

Prin urmare $k_{d,i} < k_{d,u}$, ceea ce arată că armonicile de ordin superior ale curentului sunt mai puţin pronunţate decât cele ale tensiunii şi ca urmare însăşi forma de variaţie în timp a curentului este mai puţin distorsionată decât cea a tensiunii aplicate.

Puterile vor fi:

$$P = 0; \qquad Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k = \omega L \sum_{k=1}^{\infty} k I_k^2; \qquad S = UI = \omega L \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} (kI_k)^2} \tag{4.22}$$

$$D=\sqrt{S^2-P^2-Q^2}=\omega L\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(j-k)^2 I_j^2 I_k^2}\neq 0$$

3) **Condensatorul ideal**.

Ecuația de funcționare: $i=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=C\sum_{k=1}^{\infty}k\omega U_k\sqrt{2}\sin\left(k\omega t+\alpha_k+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$I_k=k\omega C U_k \qquad \varphi_k=-\frac{\pi}{2}$$

$$I=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}=\omega C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(kU_k)^2}>\omega C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2}=\omega C U$$

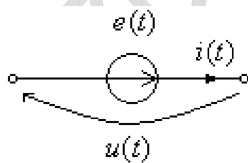
Prin urmare $k_{d,i}>k_{d,u}$ ceea ce arată că armonicile de ordin superior ale curentului sunt mai mari decât cele ale tensiunii, astfel încât condensatorul distorsionează mai puternic curba de variație a curentului în comparație cu cea a tensiunii.

Puterile vor fi:

$$P=0\,;\qquad Q=-\sum_{k=1}^{\infty}U_k I_k=-\omega C\sum_{k=1}^{\infty}kU_k^2\,;\qquad S=UI=\omega C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}U_k^2\sum_{k=1}^{\infty}(kU_k)^2}$$

$$D=\sqrt{S^2-P^2-Q^2}=\omega C\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(j-k)^2 U_j^2 U_k^2}\neq 0 \qquad (4.23)$$

4) **Sursa de tensiune.**



$$e(t)=E_0+\sum_{k=1}^{\infty}E_k\sqrt{2}\sin(k\omega t+\varphi_{E_k})$$

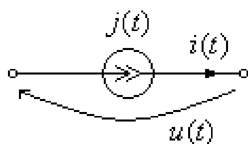
$$i(t)=I_0+\sum_{k=1}^{\infty}I_k\sqrt{2}\sin(k\omega t+\varphi_{I_k})$$

Puterile debitate de sursa de curent vor fi:

$$P_e=E_0I_0+\sum_{k=1}^{\infty}E_kI_k\cos\varphi_k \quad Q_e=\sum_{k=1}^{\infty}E_kI_k\sin\varphi_k \quad S_e=EI \quad D_e=\sqrt{S_e^2-P_e^2-Q_e^2}$$

$$\varphi_k=\varphi_{E_k}-\varphi_{I_k} \quad E=\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}E_k^2} \quad I=\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}I_k^2} \qquad (4.24)$$

5) **Sursa de curent.**



$$j(t) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \varphi_{J_k})$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \sin(k\omega t + \varphi_{U_k})$$

Puterile debitate de sursa de curent vor fi:

$$P_j = U_0 J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k J_k \cos\varphi_k \quad Q_j = \sum_{k=1}^{\infty} U_k J_k \sin\varphi_k \quad S_j = UJ \quad D_j = \sqrt{S_j^2 - P_j^2 - Q_j^2}$$
$$\varphi_k = \varphi_{U_k} - \varphi_{J_k} \quad U = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2} \quad J = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} J_k^2} \qquad (4.24)$$

4.6 REZOLVAREA CIRCUITELOR ELECTRICE MONOFAZATE ÎN REGIM PERIODIC NESINUSOIDAL

Metoda cea mai frecvent folosită pentru rezolvarea circuitelor electrice liniare în regim periodic nesinusoidal este **metoda descompunerii spectrale**. Ea se bazează pe valabilitatea teoremei de superpoziție, evidentă la circuitele liniare în studiu.

Aplicarea metodei presupune parcurgerea următoarelor etape obligatorii:

1) Descompunerea în serie Fourier a mărimilor periodice ce caracterizează sursele de excitație ale circuitului.
2) Rezolvarea regimului permanent corespunzător fiecărei armonici obținute prin descompunere.
3) Pentru calculul componentei continue şi, respectiv, a armonicelor mărimilor de răspuns, se folosesc metodele de rezolvare proprii circuitelor de curent continuu (v. cap.1) şi, respectiv, a celor de curent alternativ sinusoidal (v. cap. 2).
4) Exprimarea mărimilor căutate sub forma unor dezvoltări în serie Fourier, ce se obțin prin sumarea componentelor lor (*în expresie instantanee*) - rezultatele din rezolvările precedente.

De menționat că, în curent continuu, elementele de circuit au următorul comportament:

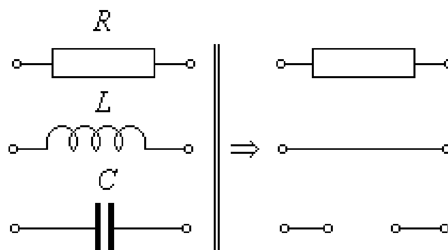


Fig.4.3 Elementele de circuit în curent continuu

5.

Circuite electrice liniare În regim tranzitoriu

Comportarea oricărui circuit electric, adică modul de variație în timp a intensității curenților şi a tensiunilor la bornele diferitelor elemente componente sau laturi ale circuitelor, este complet descrisă cu ajutorul unui sistem de ecuații ce se obține prin aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff.

Într-un circuit cu n noduri şi l laturi cu ajutorul celor două teoreme ale lui Kirchhoff se pot scrie $(n-1)$ respectiv, $b = l - n + 1$ ecuații liniar independente, adică în total $n - 1 + b = l$ ecuații, în număr egal cu numărul de laturi al circuitului. În acest fel, comportarea în timp a circuitului poate fi perfect determinată prin integrarea sistemului de ecuații stabilite:

$$\sum_{k\in(j)} i_k = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,n-1$$

$$\sum_{k\in(p)}\left(R_k i_k + L_k \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} + \sum_{h(\neq k)} L_{kh}\frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_k}\int i_k\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k\in(p)} e_k(t) \qquad p = 1,2,\ldots,b \qquad (5.1)$$

În această formă de scriere a sistemului, necunoscutele sunt intensitățile curenților din cele l laturi ale circuitului, iar variabila independentă este timpul. Circuitul fiind liniar, parametrii elementelor componente au valori constante, astfel încât sistemul descris de ecuațiile (5.1) este un *sistem de ecuații integro-diferențiale liniar şi*

neomogen cu coeficienți constanți. Observând că numai bobinele şi condensatoarele introduc câte un element diferențial în ecuațiile circuitului, conform relațiilor acestora de funcționare, ordinul N al sistemului de ecuații este egal cu suma dintre numărul N_L de bobine şi respectiv N_C de condensatoare conținute de circuit, adică cu numărul total al elementelor reactive.

Regimul tranzitoriu poate fi definit ca fiind regimul variabil al circuitelor electrice de trecere de la o stare inițială (un regim permanent) la un alt regim permanent. Acest regim poate fi determinat de situații de manevră sau de accident ce intervin în funcționarea circuitelor electrice.

Regimul tranzitoriu mai poate fi definit ca fiind acel regim de funcționare a circuitelor electrice în care soluția liberă (naturală – fără excitații) are valori importante, comparabile cu cele ale soluției forțate (cu excitații). Pe durata sa se simte influența condițiilor inițiale de funcționare.

În practică, regimul tranzitoriu are o importanță destul de mare. În rețelele electrice de transport şi distribuție, toate comutațiile (deschideri sau închideri ale întrerupătoarelor) sau avariile (scurtcircuite, întreruperi de conductoare) determină regimuri tranzitorii. Regimurile tranzitorii, deşi durează puțin, datorită constantelor de timp foarte mici pot periclita securitatea instalațiilor (prin supraintensități şi supratensiuni) sau stabilitatea funcționării acestora. În electrocomunicații şi în informatică, numeroase clase de semnale (precum succesiunile de impulsuri) au variații importante în intervale de timp, variații de acelaşi ordin de mărime cu constantele de timp ale circuitelor; ele nu pot fi studiate decât în regim tranzitoriu. De asemenea, prelucrarea semnalelor (detecție, modulație, limitare, etc.) utilizează procese tranzitorii care nu pot fi ignorate.

Pentru rezolvarea regimului tranzitoriu sunt cunoscute mai multe metode de rezolvare dintre care cele mai importante sunt:

Metoda elementară a integrării directe a sistemului de ecuații integro-diferențiale. Datorită faptului că este o metodă relativ laborioasă, aceasta metodă nu este recomandată decât în cazul unor circuite relativ simple, cu un număr redus de elemente reactive (de cele mai multe ori două).

Metodele simbolice (operaționale), care, pe baza unor transformări operaționale (transformata Laplace, transformata Fourier, transformata Z) simplifică apreciabil integrarea sistemului de ecuații integro-diferențiale ale circuitului.

Metoda variabilelor de stare permite scrierea de ecuații ale circuitului astfel încât să apară numai variabilele legate direct de comportarea elementelor reactive de circuit. Această metodă prezintă avantajele unei remarcabile sistematizări în modul de scriere a ecuațiilor dar, fiind o metoda matricială, prezintă toate inconvenientele proprii acestui mod de calcul.

În cele ce urmează vom prezenta metoda operațională folosind transformata Laplace şi metoda variabilelor de stare.

5.1. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF ÎN REGIM VARIABIL

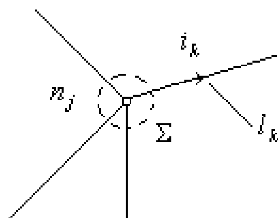
Ipotezele de bază acceptate în studiul circuitelor electrice permit deducerea celor două relații fundamentale în studiul acestor circuite: *teoremele lui Kirchhoff*. În formă lor primară aceste teoreme ilustrează proprietăți topologice generale ale circuitului.

Prima teoremă a lui Kirchhoff afirmă că suma algebrică a intensităților curenților i_k, ai laturilor l_k legate la un nod n_j al unui circuit este nulă.

$$\sum_{k\in(j)} i_k = 0 \qquad (5.2)$$

Se vor lua cu semnul plus curenții al căror sens de referință iese din nod. Ecuația de mai sus rezultă din legea conservării sarcinii

electrice aplicată pentru o suprafaţă închisă Σ ce înconjoară nodul n_j (Fig. 5.1) şi din ipoteza că sarcina acumulată pe nod este nulă ($q_\Sigma = 0$), ceea ce conduce la condiţia că intensitatea i_Σ a curentului de conducţie total ce iese din suprafaţă Σ să fie nulă.



$$i_\Sigma = -\frac{\mathrm{d}\,q_\Sigma}{\mathrm{d}\,t}$$

Fig. 5.1 Prima teoremă a lui Kirchhoff. Legea conservării sarcinii electrice.

Ca şi în cazul circuitelor electrice de curent continuu aceasta teoremă conduce la un sistem de ecuaţii liniar independente numai dacă se aplică la (n-1) din nodurile circuitului.

A doua teoremă a lui Kirchhoff pentru circuitele în regim variabil afirmă că suma algebrică a tensiunilor u_k la bornele laturilor l_k ce aparţin unei bucle (p) a unui circuit este nulă.

$$\sum_{k \in (p)} u_k = 0 \qquad (5.3)$$

Se vor considera cu plus laturile al căror sens de referinţă coincide cu sensul de referinţă ales de buclă. Ecuaţia de mai sus rezultă din aplicarea legii inducţiei electromagnetice pe o curbă închisă Γ ce parcurge pe la borne toate laturile buclei (p) (Fig.5.2) şi din ipoteza că fluxul magnetic prin orice suprafaţă exterioară eventualelor bobine de pe laturi este nul $\Phi_{S_\Gamma} = 0$, ceea ce conduce la condiţia că tensiunea electrică u_Γ, pe curba închisă Γ să fie nulă.

În ceea ce priveşte aplicarea acestei teoreme se observă că se preferă, pentru o mai bună sistematizare în modul de scriere a ecuaţiilor circuitului, ca tensiunea u_k de la bornele laturii să fie

asociată după convenția de tip receptor cu sensul curentului din latura respectivă.

Într-un circuit cu n – noduri şi l – laturi, teorema a doua a lui Kirchhoff se poate aplica pentru $b = l - n + 1$ bucle independente (Teorema lui Euler).

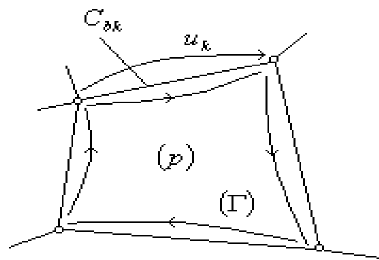


Fig. 5.2 A doua teoremă a lui Kirchhoff.

$$e_\Gamma = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{S_\Gamma}}{\mathrm{d}t}$$

Legea inducției electromagnetice

5.2 ELEMENTELE IDEALE DE CIRCUIT ÎN REGIM VARIABIL

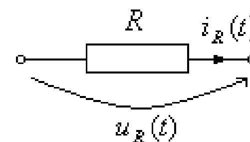
Vom preciza în cele ce urmează caracteristicile fiecărui element de circuit şi comportamentul acestora în regim variabil. Interesează dependențele între intensitățile curenților şi tensiunile la bornele laturilor.

<u>*Rezistorul ideal*</u> : caracteristica acestui element este dată de legea lui Ohm:

$$u_R(t) = Ri_R(t)$$

sau

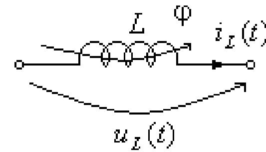
$$i_R(t) = Gu_R(t)$$



<u>*Bobina ideală fără cuplaj magnetic*</u>: tensiunea la bornele bobinei este dată de legea inducției electromagnetice:

$$u_L(t)=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \varphi(t)=\varphi(0)+\int_0^t u_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau = Li_L(t)$$

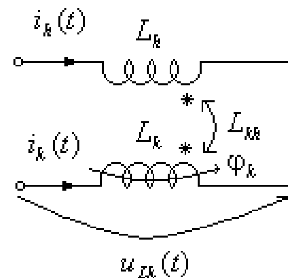
$$u_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \quad i_L(t)=i_L(0)+\frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$



Bobina ideală cu cuplaje magnetice: ca şi în cazul precedent, relaţia dintre tensiune şi curent este furnizată tot de legea inducţiei electromagnetice:

$$u_{Lk}=\frac{\mathrm{d}\varphi_k}{\mathrm{d}t} \quad \varphi_k=L_k i_k(t)+\sum_{h\neq(k)}L_{kh}i_h(t)$$

$$u_{Lk}=L_k\frac{\mathrm{d}i_k(t)}{\mathrm{d}t}+\sum_{h\neq(k)}L_{kh}\frac{\mathrm{d}i_h(t)}{\mathrm{d}t}$$

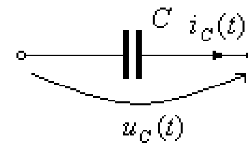


Relaţiile de mai sus arată că fluxurile magnetice totale ale bobinelor trebuie să fie funcţii de timp cu proprietăţi de continuitate – $\varphi(0_-)=\varphi(0_+)$– pentru ca tensiunile la borne să rămână finite. De asemenea, se observă că, în cazul bobinei necuplate magnetic, curentul prin bobină trebuie să aibă proprietăţi de continuitate $i_L(0_-)=i_L(0_+)$. Aceste proprietăţi vor fi utile în studiul regimului tranzitoriu.

Condensatorul ideal: caracteristica acestui element este dată de legea conservării sarcinii:

$$i_C(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad q(t)=q(0)+\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = Cu_c(t)$$

$$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad u_C(t)=u_C(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$



Ca şi în cazul bobinelor, relaţiile ce exprimă funcţionarea condensatorului arată că sarcina electrică a condensatorului trebuie să fie o funcţie de timp cu proprietăţi de continuitate $q_C(0_-)=q_C(0_+)$– curentul rămânând astfel finit. Se poate spune că datorită ecuaţiei sale

de funcționare şi tensiunea la bornele condensatorului trebuie să aibă proprietatea de continuitate $u_C(0_-) = u_C(0_+)$.

Având în vedere cele expuse anterior, a doua teoremă a lui Kirchhoff se poate exprima şi sub o altă formă, mai utilă în aplicații curente, formă ce ia explicit în considerare structura fizică reală a laturilor circuitului.

Presupunem pentru aceasta că (în cazul cel mai general posibil), fiecare latura k este alcătuită din următoarele elemente ideale: un rezistor de rezistența R_k, o bobină cu inductivitate L_k, eventual cuplată magnetic cu alte bobine (L_{kh}), un condensator de capacitate C_k şi o sursă de tensiune electromotoare $e_k(t)$–Fig.5.3.

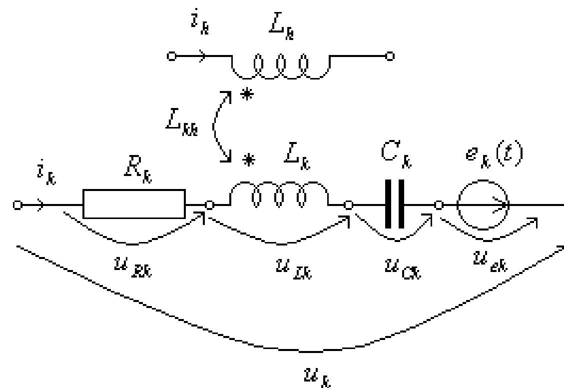


Fig.5.3. Latura de circuit cu structură completă.

Înlocuind expresia tensiunii u_k în expresia (5.3) se ajunge la următoarea formă echivalentă a celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k\in(p)}\left(R_k i_k + L_k \frac{\mathrm{d}i_k}{\mathrm{d}t} + \sum_{h(\neq k)} L_{kh}\frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_k}\int i_k\,\mathrm{d}t\right) = \sum_{k\in(p)} e_k(t) \qquad (5.4)$$

Prin urmare suma algebrică a căderilor de tensiune pe elementele componente ale laturilor unor bucle ale circuitului este în orice moment suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor din acele laturi, toate semnele fiind stabilite prin raportarea sensurilor

curenților şi tensiunilor la un sens oarecare de parcurgere a buclei ales arbitrar.

5.3 ECUAŢIILE CIRCUITELOR ELECTRICE. PROBLEMA CONDIŢIILOR INIŢIALE. REGIMURI DE FUNCŢIONARE

Comportarea oricărui circuit electric, adică modul de variație în timp a intensității curenților şi a tensiunilor la bornele diferitelor elemente componente sau laturi ale circuitelor, este complet descrisă cu ajutorul unui sistem de ecuații ce se obține prin aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff. Aşa cum am precizat în subcapitolele anterioare, cu ajutorul celor două teoreme se pot scrie (n –1) respectiv, b ecuații liniar independente, adică în total n–1+b=l ecuații, în număr egal cu numărul de laturi al circuitului. În acest fel, comportarea în timp a circuitului poate fi perfect determinată prin integrarea sistemului de ecuații stabilite (vezi subcapitolul anterior).

$$\sum_{k\in(j)} i_k = 0 \qquad j = 1,2,\dots,n-1$$

$$\sum_{k\in(p)}\left(R_k i_k + L_k\frac{\mathrm{d}\,i_k}{\mathrm{d}\,t} + \sum_{h(\neq k)} L_{kh}\frac{\mathrm{d}\,i_h}{\mathrm{d}\,t} + \frac{1}{C_k}\int i_k\,\mathrm{d}\,t\right) = \sum_{k\in(p)} e_k(t) \qquad p = 1,2,\dots,b \tag{5.5}$$

În această formă de scriere a sistemului, necunoscutele sunt intensitățile curenților din cele l laturi ale circuitului, iar variabila independentă este timpul. Circuitul fiind liniar, parametrii elementelor componente au valori constante, astfel încât sistemul descris de ecuațiile (5.5) este un *sistem de ecuații integro-diferențiale liniar şi neomogen cu coeficienți constanți*. Observând că numai bobinele şi condensatoarele introduc câte un element diferențial în ecuațiile circuitului, conform relațiilor acestora de funcționare, ordinul N al sistemului de ecuații este egal cu suma dintre numărul N_L de bobine şi

respectiv N_C de condensatoare conținute de circuit, adică cu numărul total al elementelor reactive.

În cazul rețelelor liniare, prin eliminări succesive, sistemul de ecuații (5.5) se poate reduce în raport cu o funcție necunoscută $x(t)$ la o ecuație diferențială liniară neomogenă, cu coeficienți constanți, de forma:

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = y(t) \tag{5.6}$$

Coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ depind numai de structura rețelei şi au aceleaşi valori (până la un factor multiplicativ) pentru orice funcție necunoscută *x(t)*, a sistemului inițial, iar membrul drept *y(t)* depinde de structura circuitului, de mărimile caracteristice ale surselor presupuse variabile în timp şi de funcția necunoscută *x(t)* în raport cu care s-a făcut eliminarea.

Conform teoriei matematice a sistemelor de ecuații diferențiale, de forma (5.6), expresia în timp a intensității fiecăruia dintre curenți *x(t)* se scrie ca suma dintre două componente:

$$x(t) = x_l(t) + x_p(t)\,. \tag{5.7}$$

Prima dintre aceste componente, $x_l(t)$, este soluția sistemului de ecuații *omogenizate*, adică pentru care s-a presupus că toate sursele existente în circuit se pasivizează *y(t)*=0 (e_k (t)=0). Mărimile caracteristice ale circuitului, intensitățile curenților din laturi şi tensiunile la bornele diferitelor elemente, vor fi în acest caz determinate de valorile inițiale ale unora dintre ele. Aceasta soluție se numeşte ***soluție de regim liber*** şi ea are forma:

$$x_l(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\,\mathrm{e}^{\alpha_k t} = \sum_{k=1}^{n} A_k(t)\exp(\alpha_k t)\,. \tag{5.8}$$

În relația (2.7) $A_k(t),\ \ k = 1,2,\ldots,n$ sunt termeni de integrare, iar $\alpha_k,\ \ 1,2\ldots,n$ sunt rădăcinile ecuației caracteristice, care se obține din

ecuația diferențială omogenă înlocuind formal derivata de ordin k a funcției necunoscute cu puterea k a unei necunoscute α:

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots a_1\alpha + a_0 = 0 \tag{5.9}$$

În ecuația (5.9) α_k este o rădăcină multiplă de ordinul m_k . Polinoamele $A_k(t)$ sunt de ordinul $(m_k - 1)$ în variabila t, cu coeficienți reali sau complecşi. Deoarece fizic se constată că în absența surselor, mărimile ce definesc comportarea oricărui circuit real tind să se anuleze după scurgerea unui anumit timp, rezultă că rădăcinile ecuației caracteristice îndeplinesc în mod obligatoriu condiția:

$$\Re e\{\alpha_k\} < 0 \tag{5.10}$$

În circuitele reale (care conțin elemente disipative–rezistente) regimul liber este un regim amortizat, care se stinge treptat pe măsură ce timpul creşte, adică:

$$\lim_{t\to\infty} x_l(t) = 0 \tag{5.11}$$

Soluția astfel scrisă conține un număr de constante de integrare egal cu ordinul sistemului, adică cu numărul N de elemente reactive ale circuitului.

A doua componentă a soluției, $x_p(t)$, este o soluție particulară (complet determinată) a ecuației neomogene (care are în dreapta termenul $y(t)$), ***numită soluție de regim fortat***, deoarece forma ei este impusă de funcția reprezentată de termenul liber al ecuației, adică de condițiile exterioare. Dacă termenul liber este o constantă, un polinom de t, o exponențială sau o combinație liniară de astfel de funcții de timp, atunci soluția de regim forțat se găseşte sub forma unei funcții de timp de aceeaşi formă; parametrii soluției de regim forțat se pot determina complet prin substituție în ecuația neomogenă a formei căutate şi identificate.

Determinarea celor N constante de integrare se face prin referire la *condițiile inițiale ale circuitului*, adică la valorile la momentul t=0 ale

unora dintre mărimile sale caracteristice. Deoarece elementele reactive sunt cele care au determinat natura integro-diferențială a ecuațiilor circuitelor, condițiile cerute se vor referi la mărimile ce definesc comportarea lor.

Pentru bobină şi pentru condensatorul ideal se pot scrie ecuațiile:

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= \frac{1}{L}\int u_L(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + i_L(0) \\
u_C(t) &= \frac{1}{L}\int i_C(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau + u_C(0)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Din ecuațiile (5.12) rezultă că, o dată cu specificarea exactă a originii timpului, pentru cunoaşterea la un moment t >0 a intensității curentului prin bobină i_L şi respectiv, a tensiunii la bornele condensatorului u_C, trebuie cunoscute valorile acestor mărimi la momentul t=0. Ele fiind în număr de N_L, respectivă N_C, se dispune astfel exact numărul de condiții necesare determinării celor N constante de integrare.

Studiul circuitelor electrice în regim variabil în timp prezintă o importanță deosebită mai ales pentru faptul că permite anticiparea comportării lor în cazul în care, fie prin manevre voite (comutări, conectări sau deconectări), fie accidental (scurtcircuite, puneri la pământ, întreruperi etc.), se produc modificări bruşte în structura sau în condițiile de excitare a circuitului. În aceste cazuri, ca moment origine de timp (t=0) se ia de obicei chiar momentul efectuării manevrei sau producerii accidentului, iar condițiile inițiale se determină impunând ca pe durata (infinit de scurtă) de punere a circuitului în noile situații de funcționare, intensitatea curentului din orice bobină şi tensiunea la bornele oricărui condensator să varieze în mod continuu:

$$
\begin{aligned}
i_L(0_-) &= i_L(0_+); \\
u_C(0_-) &= u_C(0_+)
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

În ecuația (5.13) 0_-, respectiv 0_+, sunt momentele imediat anterior şi ulterior conectării considerate.

Se numeşte ***regim permanent*** acel regim de funcţionare al circuitelor electrice în care componenta liberă a soluţiei (soluţia liberă) este neglijabilă în raport cu cea forţată. În fapt, regimul permanent poate fi definit că fiind acea soluţie asimptotică, pentru *t* tinzând către infinit, a soluţiei generale dată de ecuaţia (5.6). Dacă termenul liber *y(t)* este o constantă sau este o funcţie periodică de timp, iar regimul liber este amortizat (se anulează când $t \to \infty$), soluţia de regim forţat îşi păstrează forma la valori oricât de mari ale timpului şi se confundă cu soluţia de regim permanent:

$$x(t) \to x_p(t) \quad \text{cand} \quad t \to \infty \tag{5.14}$$

Aceasta este situaţia cea mai întâlnită în practică la circuite liniare alimentate cu tensiuni constante sau periodice. În aceste circuite regimul forţat se confundă cu regimul permanent şi, de aceea, de multe ori nu se mai face distincţie între aceste regimuri. Aceste cazuri particulare (excitaţii constante sau sinusoidale) sunt numite ***regimuri staţionare*** (regimul permanent de curent continuu şi regimul permanent sinusoidal).

Dacă însă termenul liber nu este o constantă sau o funcţie de timp periodică, atunci nu există un regim permanent al circuitului.

Regimul tranzitoriu este acel regim de funcţionare al circuitelor electrice în care soluţia liberă (naturală) are valori importante, comparabile cu cele ale soluţiei forţate. Pe durata sa se simte influenţa condiţiilor iniţiale de funcţionare. Acest regim este determinat de situaţii de manevră sau de accident ce intervin în funcţionarea circuitelor electrice. Regimul tranzitoriu poate fi definit că fiind regimul variabil de trecere de la o stare iniţială (un regim permanent) la un alt regim permanent.

În practică, regimul tranzitoriu are o importanţă destul de mare. În reţelele electrice de transport şi distribuţie, toate comutaţiile (deschideri sau închideri ale întrerupătoarelor) sau avariile (scurtcircuite, întreruperi de conductoare) determină regimuri

tranzitorii. Regimurile tranzitorii, deşi durează puțin, datorită constantelor de timp foarte mici pot periclita securitatea instalațiilor (prin supraintensități şi supratensiuni) sau stabilitatea funcționării acestora. În electrocomunicații şi în informatică, numeroase clase de semnale (precum succesiunile de impulsuri) au variații importante în intervale de timp, variații de acelaşi ordin de mărime cu constantele de timp ale circuitelor; ele nu pot fi studiate decât în regim tranzitoriu. De asemenea, prelucrarea semnalelor (detecție, modulație, limitare, etc.) utilizează procese tranzitorii care nu pot fi ignorate.

Pentru rezolvarea regimului tranzitoriu sunt cunoscute mai multe metode de rezolvare dintre care cele mai importante sunt:

Metoda elementară a integrării directe a sistemului de ecuații integro-diferențiale. Datorită faptului că este o metodă relativ laborioasă, aceasta metodă nu este recomandată decât în cazul unor circuite relativ simple, cu un număr redus de elemente reactive (de cele mai multe ori două).

Metodele simbolice (operaționale), care, pe baza unor transformări operaționale (transformata Laplace, transformata Fourier, transformata Z) simplifică apreciabil integrarea sistemului de ecuații integro-diferențiale ale circuitului.

Metoda variabilelor de stare permite scrierea de ecuații ale circuitului astfel încât să apară numai variabilele legate direct de comportarea elementelor reactive de circuit. Această metodă prezintă avantajele unei remarcabile sistematizări în modul de scriere a ecuațiilor dar, fiind o metoda matricială, prezintă toate inconvenientele proprii acestui mod de calcul.

În cele ce urmează vom prezenta metoda elementară a integrării directe şi metoda operațională folosind transformata Laplace.

5.4 METODA ELEMENTARĂ DE ANALIZĂ A REGIMULUI TRANZITORIU

Această metodă, numită şi *analiza în domeniul timpului*, constă în rezolvarea directă a sistemului de ecuații integro-diferențiale ale circuitului.

Cu tot avantajul abordării directe şi intuitive a studiului comportării circuitului, metoda elementară prezintă marele neajuns al unor calcule lungi şi laborioase, ceea ce o face practic inaplicabilă în cazul unor circuite având un grad cât mai ridicat de complexitate.

Metoda de rezolvare a regimului tranzitoriu are următoarele etape:

1. Se scriu ecuațiile diferențiale ale circuitului (care rezultă prin aplicarea sistematică a teoremelor lui Kirchhoff şi eventual prin derivări şi eliminarea unor necunoscute).
2. Se caută soluția de regim tranzitoriu $x(t)$ sub forma unor sume ale soluțiilor de regim liber cu soluțiile de regim forțat (care poate fi şi soluția de regim permanent).
3. Soluțiile de regim liber se determină cu ajutorul ecuațiilor caracteristice, ca soluții generale ale sistemului omogen (de exemplu, cu toate t.e.m. nule), care depind de un număr de constante arbitrare (egal sau mai mic decât numărul elementelor reactive ale circuitului). Ecuația caracteristică este unică pentru o rețea conexă sau formată din mai multe sub-rețele care se influențează reciproc.
4. Soluțiile de regim forțat se determină ca soluții particulare ale sistemului neomogen de formă complet determinată de termenul liber. În cazul t.e.m. constante sau sinusoidale, soluțiile forțate au aceeaşi formă că t.e.m. iar soluțiile se pot determina cu metodele folosite în regimul permanent.
5. Cu ajutorul condițiilor inițiale se determină constantele de integrare din expresiile complete (de regim tranzitoriu) ale soluțiilor.

Dacă circuitele au o structură mai complicată, dacă t.e.m. nu sunt constante sau periodice sau dacă se cere să se determine numai una din funcțiile necunoscute, această metodă se dovedeşte relativ laborioasă şi greu de sistematizat. Totodată condițiile inițiale, exprimate prin valori inițiale ale funcțiilor cunoscute şi ale derivatelor acestora, necesită o analiză prealabilă a circuitului, pentru a stabili care dintre mărimi au proprietăți de continuitate în momentul inițial considerat (care în general, este un moment de discontinuitate pentru anumite mărimi, respectiv de schimbare a structurii rețelei). Mărimile care nu suferă discontinuități – fluxurile totale ale bobinelor (întrucât discontinuitatea lor ar determina t.e.m. induse infinite) – şi sarcinile condensatoarelor (întrucât discontinuitatea lor ar determina curenți infiniți) – se numesc mărimi de stare ale circuitului.

Rezolvarea regimului tranzitoriu pentru circuite de ordin întâi

Circuitele de ordin întâi sunt circuite ce conțin un singur element reactiv, sau la care ecuațiile care descriu funcționarea lor se reduc la ecuații diferențiale de ordinul întâi. Acestea pot fi circuite de tip *RL* sau *RC* sau circuite reductibile la acestea.

Ecuațiile care caracterizează aceste circuite sunt, aşa cum am precizat şi în subcapitolele anterioare, ecuații diferențiale, neomogene, cu coeficienți constanți (considerăm elementele de circuit liniare).

În cazul circuitelor de ordin I, acestea au forma descrisă de ecuația (2.15):

$$a\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t}+bx(t)=y(t) \tag{5.15}$$

Vom considera cazurile cel mai des întâlnite în practică când *y(t)* este o funcție constantă (sursa de tensiune de curent continuu) sau o funcție sinusoidală - caz ce corespunde, de exemplu, aplicării pe circuit a unei surse de tensiune sinusoidală.

Ecuația de mai sus are o soluție de forma:

$$x(t) = x_l(t) + x_f(t) \tag{5.16}$$

În care $x_l(t)$ reprezintă soluția ecuației diferențiale omogene (fără termen liber), iar $x_f(t)$ este soluția forțată, ce se caută ca fiind o soluție particulară a ecuației (5.16). Deoarece circuitele vor fi reale (cu elemente disipative) soluțiile trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

- Soluția liberă trebuie să dispară după un timp suficient de lung ($x_l(t) \rightarrow 0,\ t \rightarrow \infty$).
- Soluția forțată în cazul unei excitații constante sau sinusoidale, coincide după un timp suficient de lung cu soluția de regim permanent $x_f(t) = x_p(t)$, adică soluția de curent continuu sau alternativ la un timp suficient după comutație: $x_f(t) = x_p(t) = x(\infty)$.

Soluția de regim liber are următoarea formă:

$$x_l(t) = A\mathrm{e}^{\alpha t} = A\exp(\alpha t) \tag{5.17}$$

Constanta α este soluția ecuației algebrice ataşate ecuației diferențiale, adică este soluție a ecuației:

$$a\alpha + b = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{a} = \frac{1}{\tau} \tag{5.18}$$

Prin urmare, soluția de regim liber va fi:

$$x_l(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = A\exp(-t/\tau) \tag{5.19}$$

Termenul A reprezintă o constantă ce va fi determinată din condițiile inițiale ale circuitului, mai exact din condițiile de continuitate ale fluxului prin bobine, respectiv ale sarcinilor de pe condensatoare.

Având în vedere că soluția de regim forțat este soluția după un timp îndelungat de la comutație (în noua topologie a circuitului) vom obține soluția finală ca în (5.20):

$$x(t) = A\exp(-t/\tau) + x(\infty) \tag{5.20}$$

În momentul t=0 se cunoaşte condiția inițială $x(0)$; prin urmare constanta A va fi egală cu diferența dintre valoarea inițială şi valoarea finală a variabilei de stare x (care este fie tensiunea pe condensator fie curentul prin bobine). Prin urmare soluția va fi:

$$x(t) = \left(x(0) - x(\infty)\right)\exp\left(-t/\tau\right) + x(\infty) \tag{5.21}$$

Termenul notat cu τ poartă numele de <u>*constantă de timp a circuitului*</u>. Această mărime este o foarte bună măsură a "inerției electrice" a circuitului, adică a promptitudinii cu care circuitul este capabil să urmărească variațiile semnalului de excitație care i se aplică. În general, comportarea dinamică este cu atât mai bună cu cât constanta de timp este mai mică, în fapt cu cât elementele disipative au valori mai ridicate.

Constanta de timp a circuitului dă şi o măsură a duratei regimului tranzitoriu; astfel, se poate observa din (5.21) că, după un interval de timp egal cu 3τ, valoarea mărimii diferă cu circa 5% față de valoarea sa de regim permanent şi aceasta pentru că la momentele 5τ, respectiv 10τ, diferența sa scade la numai 0.67% respectivă 0.04 %. Prin urmare, se poate spune cu o foarte bună aproximare că, după un timp egal cu de trei ori constanta de timp a circuitului, regimul tranzitoriu este încheiat.

Acesta este aşadar cea mai simplă metodă de a rezolva circuitele ce conțin un singur element reactiv.

Deseori se întâlnesc circuite de tipul *RL* sau *RC* în diverse tipuri de configurații la care putem aplica direct relația (5.21); pentru aceste circuite cărora le aplicăm o excitație constantă, în condiții inițiale nule obținem următoarea soluție:

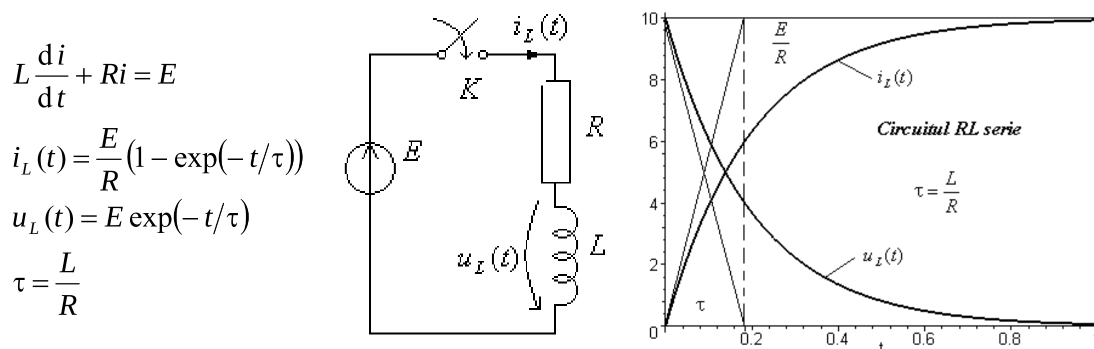


Fig. 5.4 Răspunsul circuitul *RL* în condiții inițiale nule la excitație constantă.

Analog vom obține şi pentru cazul circuitului *RC*:

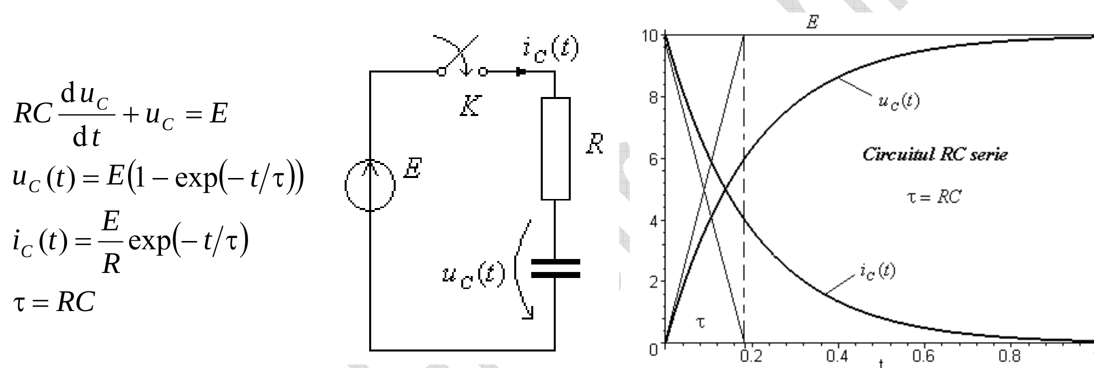


Fig. .5.5 Răspunsul circuitul *RC* în condiții inițiale nule la excitație constantă.

Aşa cum se observă şi din variațiile în timp ale mărimilor caracteristice fiecărui tip de circuit în parte, constanta de timp are şi o interpretate grafică, ea fiind egală cu subtangenta în punctul de comutație la graficul de variație al mărimii respective. De fapt el va fi calculat pentru circuitele de tip *RL* ca raport dintre inductivitate şi rezistența electrică echivalentă "văzută" de inductivitate la bornele ei, respectiv la circuitele de tip *RC*, ca şi produs dintre capacitate şi rezistența electrică echivalentă "văzută" de condensator la bornele sale.

Dacă la bornele unui circuit *RL*, de exemplu, se aplică o tensiune sinusoidală de tipul $e(t) = E \sin \omega t$, răspunsul circuitului va fi asemănător:

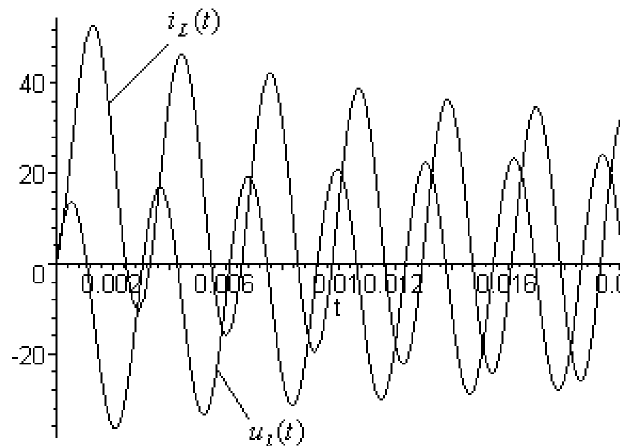


Fig.5.6 Răspunsul unui circuit *RL* la excitaţie sinusoidală

În acest caz valorile curentului şi a tensiunii prin bobină variază după legile:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= I_0\left[\exp(-t/\tau)\sin\varphi + \sin(\omega t - \varphi)\right] \\ u_L(t) &= E\sin\varphi\left[\exp(-t/\tau)\cos\varphi + \cos(\omega t - \varphi)\right] \\ I_0 &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},\ \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega L}{R} \end{aligned} \tag{5.22}$$

<u>Observaţii:</u> În practică, o importanţă tehnică deosebită o are comutaţia bobinelor şi a condensatoarelor.

- Astfel în cazul deschiderii unui ***circuit RL*** variaţia foarte rapidă spre zero a intensităţii curentului electric poate induce o t.e.m. (cădere inductivă de tensiune) suficient de mare pentru a favoriza producerea unui arc electric între contactele întrerupătorului. Acest lucru prezintă pericolul străpungerii izolaţiei bobinei sau accidentării operatorului, iar pe termen lung poate duce la distrugerea contactelor. De cele mai multe ori neajunsul se înlătura evitând întreruperea bruscă a curentului prin bobină, iar atunci când acest lucru nu este posibil, se leagă în derivaţie cu bobină o rezistenţa de valoare foarte mare, prin care se închide curentul

generat de t.e.m. autoindusă la deschiderea circuitului. La instalațiile electrice şi pe liniile electrice de mare putere, unde montarea unor asemenea rezistențe nu este posibilă, aparatele pentru întreruperea curentului sunt prevăzute cu dispozitive speciale pentru întreruperea arcului electric iar manipularea lor se face numai de la distanță.

- În cazul ***circuitelor RC***, la încărcarea condensatoarelor, dacă rezistența este destul de mică, apar curenți de intensitate foarte ridicată care pot periclita atât termic cât şi electrodinamic securitatea instalațiilor. Din acest motiv, bateriile mari de condensatoare au rezistoare sau alte dispozitive pentru limitarea curentului de încărcare. Dacă după încărcarea unui condensator se deschide întrerupătorul, condensatorul rămâne încărcat la tensiunea (eventual înalta) la care era încărcat înainte de deschiderea întrerupătorului un timp îndelungat. Din aceasta cauză este indicat, pentru a se evita pericolul de electrocutare, că acest condensator să fie descărcat folosind rezistențe de valoare ridicată. În caz contrar el se va descărca foarte lent, numai prin rezistența dielectricului, proces ce poate dura şi câteva zile.

Rezolvarea regimului tranzitoriu pentru circuite de ordin doi

Aceste circuite sunt circuitele electrice care conțin două elemente reactive (de regulă bobină şi condensator) iar ecuația de caracterizare a acestora este o ecuație diferențială neomogenă cu coeficienți constanți de ordinul doi având forma celei din relația (5.23).

$$a\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}+cx(t)=y(t) \qquad (5.23)$$

Soluția acestei ecuații este compusă din soluția de regim liber şi soluția forțată.

Soluția forțată se determină, ca fiind o soluție particulară a ecuației diferențiale generale. Ea va trebui găsită (de cele mai multe ori ca o soluție de regim permanent) ca o soluție a ecuației după ce regimul tranzitoriu a încetat (adică după un timp suficient de lung ca efectele acestuia să nu mai poată fi percepute). În practică se consideră că toate derivatele sunt nule, determinându-se astfel o soluție pentru regimul forțat.

Soluția de regim liber are forma:

$$x_l(t) = A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t) \tag{5.24}$$

În ecuația (5.24) termenii A_1, respectiv A_2, se determină din condițiile de continuitate ale fluxului din bobină şi ale sarcinii de pe condensator:

$$\begin{aligned} q_C(0_+) &= q_C(0_-) \\ \Phi_L(0_+) &= \Phi_L(0_-) \end{aligned} \tag{5.25}$$

Parametrii α_1 şi α_2 sunt soluțiile ecuației algebrice ataşate ecuației diferențiale omogene, adică sunt soluțiile ecuației:

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \tag{5.26}$$

Având în vedere caracterul realist al majorității circuitului, pentru ca soluția să fie stabilă trebuie ca ambele soluții ale ecuației de mai sus să aibă partea reală negativă. În funcție de aceste două rădăcini se disting mai multe regimuri ale soluției de regim liber deci, implicit, ale soluției de regim tranzitoriu:

- Dacă rădăcinile ecuației algebrice ataşate ecuației diferențiale omogene **sunt reale** ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$), atunci :
  - Dacă ele sunt diferite ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) atunci avem **regim aperiodic (supraamortizat)**.
  - Dacă ele sunt egale ($\alpha_1 = \alpha_2$) atunci avem **regim aperiodic critic**.

- Dacă rădăcinile ecuației algebrice ataşate ecuației diferențiale omogene **sunt complexe** ($\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}$), atunci :
    - Dacă există elemente disipative (cazul real) avem regim **oscilatoriu amortizat**.
    - Dacă nu există elemente disipative (cazul teoretic) avem regim **oscilatoriu neamortizat**.

Pentru un studiu mai simplificat, dar şi pentru a pune în evidență câteva fenomene calitative, vom considera în cele ce urmează un circuit simplu *RLC* serie (Fig.5.7) căruia i se aplică la un moment t=0 o tensiune continuă constantă E. Intenționăm să determinăm la această excitație funcție de parametrii acestuia R, L şi C.

Ecuația caracteristică acestui circuit este:

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E \tag{5.27}$$

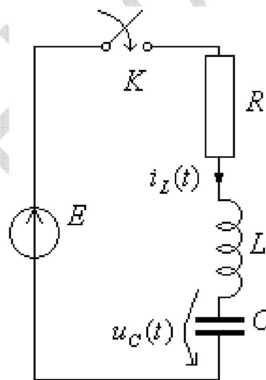


Fig.5.7 Circuit *RLC* serie în regim tranzitoriu.

Soluțiile ecuației algebrice ataşate ecuației diferențiale (5.24) sunt:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad \text{unde} \quad \delta = \frac{1}{2}\frac{R}{L} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \tag{5.28}$$

Prin urmare soluția generală are forma :

$$u_C(t) = u_{Cl}(t) + u_{Cf}(t) = A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t) + E \tag{5.29}$$

Condițiile inițiale se determină cu relațiile:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5.30}$$

a) **Regimul liber oscilatoriu amortizat**

Dacă $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$ se notează cu $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ iar rădăcinile ecuației caracteristice vor fi complexe conjugate:

$$\alpha_1 = -\delta + \mathrm{j}\omega \quad \alpha_2 = -\delta + \mathrm{j}\omega \tag{5.31}$$

În acest caz δ se numeşte constantă de atenuare a oscilațiilor libere de amortizare, ω_0 – este pulsația oscilațiilor libere neamortizate, iar ω – pulsația oscilațiilor libere amortizate ale circuitului.

După stabilirea condițiilor inițiale soluția de regim tranzitoriu capătă forma:

$$u_C(t) = E\left(1 - \frac{1}{\sin k}\exp(-\delta t)\sin(\omega t + k)\right) \tag{5.32}$$

În care s-a notat:

$$\sin k = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \quad \cos k = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{5.33}$$

Curentul prin circuit este:

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{L\omega}\exp(-\delta t)\sin\omega t \tag{5.34}$$

În Fig.5.8 am reprezentat variația în timp a curentului prin bobină.

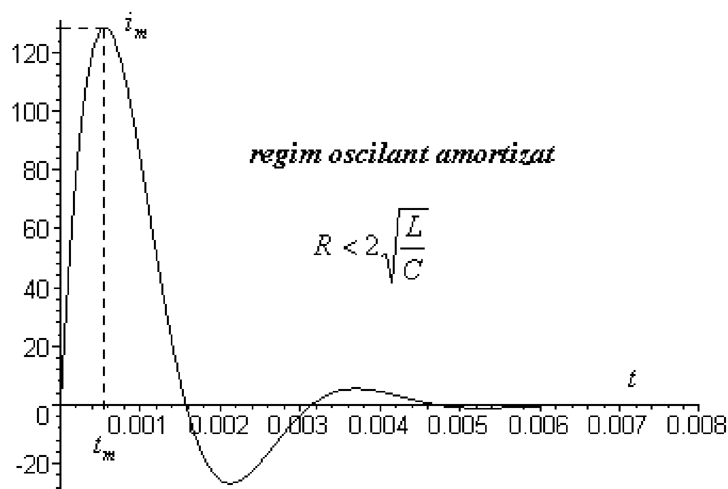


Fig.5.8 Variația curentului prin bobină în regim periodic amortizat.

Timpul după care curentul capătă valoarea maximă şi valoarea acestui maxim este:

$$t_m = \frac{1}{\delta}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \quad i_m = \frac{E}{\omega L}\exp(-\delta t_m)\sin\omega t_m$$
$$\text{unde } x = \sqrt{m^2-1} \quad \text{iar } m = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} > 1 \tag{5.35}$$

Panta de creştere a curentului în primul moment este: $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L}$. Deci în primul moment toată tensiunea se aplică bobinei ideale, iar inductivitatea acesteia determină panta inițială a curentului.

b) **Regimul liber oscilatoriu neamortizat**

Acest regim se obține în cazul ideal dacă circuitul nu conține elemente nedisipative: R=0.

În acest caz se determină uşor relațiile:

$$u_C(t) = E(1-\cos\omega_0 t)$$
$$i_L(t) = \frac{E}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t \tag{5.36}$$

Timpul după care curentul ajunge la valoarea maximă, precum şi această valoare, sunt uşor de determinat:

$$t_m = \frac{\pi}{2\omega_0} \quad i_m = \frac{E}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \tag{5.37}$$

În mod evident acest regim este pur teoretic deoarece în realitate după un timp foarte lung de la comutaţie oscilaţiile libere ale mărimilor se vor stinge. Totuşi această situaţie poate fi regăsită într-o destul de bună aproximaţie în cazul în care parametrii elementelor reactive sunt destul de mari în comparaţie cu valoarea rezistenţei ohmice a circuitului. În electrotehnică acest regim este în general evitat datorită instabilităţii răspunsului dat de circuit. Se spune că acesta nu oferă o soluţie asimptotică.

Variaţia în timp a curentului în acest caz este dată în Fig.5.9:

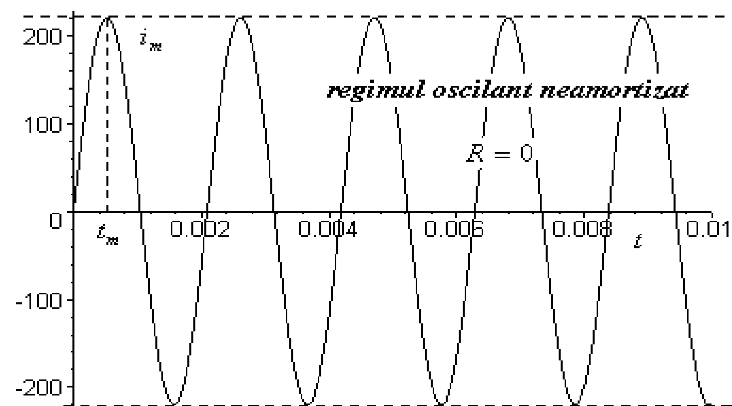


Fig.5.9 Variaţia curentului prin circuit pentru regimul periodic neamortizat.

c) **Regimul liber aperiodic (supraamortizat)**

Acest regim este întâlnit atunci când este îndeplinită inegalitatea $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$. În acest caz ecuaţia caracteristică are două rădăcini reale negative:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \beta \quad \text{unde} \quad \delta = \frac{1}{2}\frac{R}{L} \quad \beta = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{5.38}$$

Soluția poate fi dedusă observând că $\beta = j\omega$. Folosind relațiile dintre funcțiile trigonometrice de argument imaginar şi funcțiile hiperbolice, se stabilesc următoarele expresii:

$$u_C(t) = E\left(1 - \frac{1}{\operatorname{sh} k'}\exp(-\delta t)\operatorname{sh}(\omega t + k')\right) \tag{5.39}$$

În care s-au notat:

$$\sin k = \frac{\beta}{\omega_0} = \sqrt{\frac{R^2 C}{4L} - 1} \quad \cos k = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{5.40}$$

Curentul circuitului este:

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L\beta}\exp(-\delta t)\operatorname{sh}\beta t \tag{5.41}$$

Timpul după care curentul capătă valoarea maximă şi valoarea acestui maxim este:

$$\begin{gathered} t_m = \frac{1}{\delta}\frac{\operatorname{arcth} x}{x} \quad i_m = \frac{E}{\beta L}\exp(-\delta t_m)\operatorname{sh}\beta t_m \\ \text{unde } x = \sqrt{1 - m^2} \quad \text{iar } m = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < 1 \end{gathered} \tag{5.42}$$

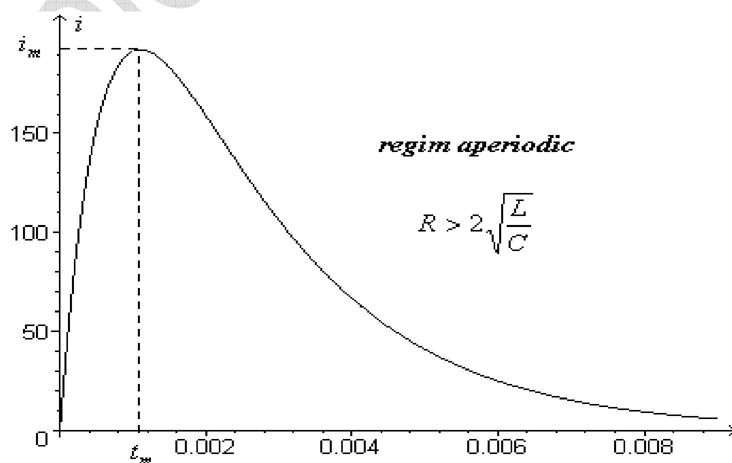


Fig.5.10 Variația curentului prin circuit pentru regimul liber aperiodic

(supraamortizat).

d) **Regimul liber aperiodic critic**

Regimul apare $\delta^2 - \omega_0^2 = 0$. În acest caz ecuația caracteristică are o rădăcină dublă egală cu –δ. Soluția se poate deduce direct din relația (5.39, 41) prin trecere la limita $(\omega \to \delta \quad \omega \to 0)$. Rezultă :

$$u_C(t) = E(1 + (1 + \delta t)\exp(-\delta t))$$
$$i_L(t) = \frac{E}{L} t \exp(-\delta t) \qquad (5.43)$$

Variația în domeniul timp a curentului prin circuit va fi:

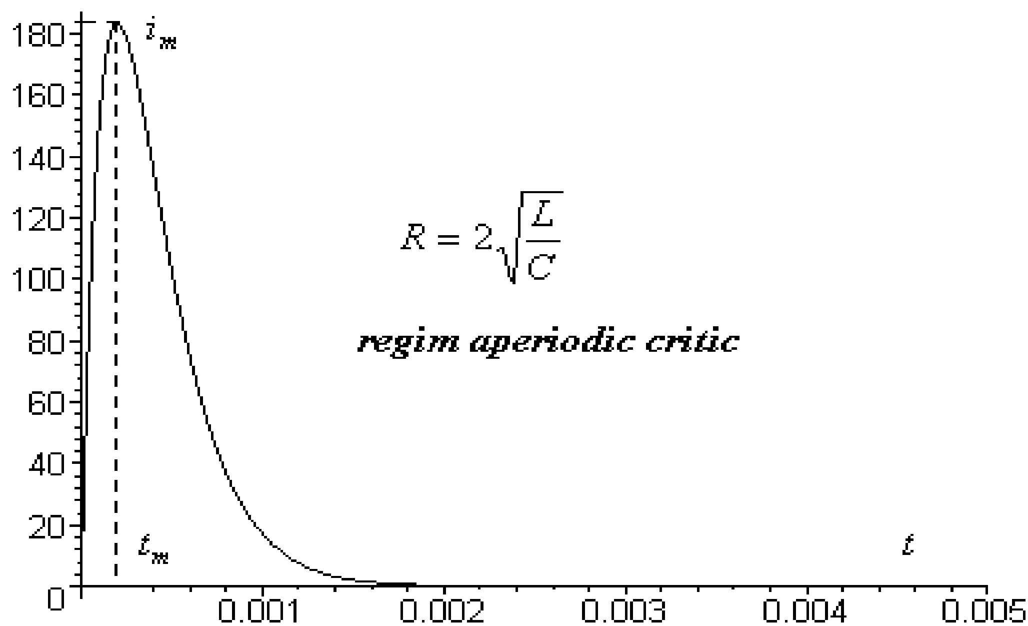


Fig.5.11 Variația curentului prin circuit pentru regimul aperiodic critic.

Timpul după care curentul capătă valoarea maximă şi valoarea acestui maxim este:

$$t_m = \frac{1}{\delta} \quad i_m = \frac{E}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \mathrm{e}^{-1} \qquad (5.44)$$

5.5 REZOLVAREA REGIMULUI TRANZITORIU PE BAZA TRANSFORMĂRII LAPLACE

Metodele operaționale de analiza a circuitelor electrice au că scop simplificarea modului de rezolvare a ecuațiilor integro-diferențiale ce descriu comportarea acestor circuite. Principiul de bază al acestor metode este acela de a asocia în mod biunivoc fiecărei funcții de variabilă timp (numită *funcție original*) o funcție de o variabilă complexă s (numită *funcție imagine*), astfel încât sistemului de ecuații integro-diferențiale amintite să-i corespundă un sistem de ecuații algebrice, în general liniare, în imaginile mărimilor necunoscute.

Dintre metodele operaționale folosite în mod curent în electrotehnică, în cele ce urmează vom prezenta numai metoda bazată pe transformarea Laplace, care este de fapt cea mai frecvent folosită.

Transformarea Laplace este prin definiție corespondența:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\exp(-st)\,\mathrm{d}t \qquad (5.45)$$

ce asociază funcției original $f(t)$ funcția imagine $F(s)$ de variabilă complexă s.

Pentru ca integrala (5.45) să existe, funcția $f(t)$ trebuie să satisfacă următoarele condiții :

- să fie mărginită şi integrabilă (în sens Riemann) în orice interval (t_1, t_2), unde $0< t_1< t_2$;
- să fie absolut integrabilă în intervalul $[0, t_0]$, cu $t_0 >0$;
- să existe cel puțin o valoare $s = s_0$, pentru care integrala are sens; dacă este absolut convergentă pentru $s = s_0$, atunci va fi absolut convergentă : orice $\Re e\{s\} \geq \Re e\{s_0\}$.

În aceste condiții se poate găsi în general o valoare minimă a lui $\Re e\{s\}$, notată cu α pentru care există transformata Laplace a funcției $f(t)$: aceasta este *abscisa de convergență simplă*. Domeniul de definiție

al funcției *F(s)* este atunci semiplanul complex aflat la dreapta dreptei $\Re e\{s\} = \alpha$; se poate demonstra că în acest domeniu funcția *F(s)* este şi regulată.

Practic totalitatea funcțiilor de timp întâlnite în electrotehnică îndeplinesc condițiile în care li se poate asocia o imagine Laplace.

Imaginea Laplace F(s) a unei funcții original *f(t)* se notează cu: $F(s) = L\{f(t)\}$

Specific metodelor operaționale, deci şi metodei transformatei Laplace, etapa cea mai dificilă a calculului este momentul în care, o dată găsite imaginile Laplace ale funcțiilor necunoscute, trebuie calculate funcțiile original. Pentru aceasta s-ar putea folosi în primul rând transformările unor funcții elementare cunoscute care, în marea lor majoritate, sunt tabelate dar, în general, ar trebui aplicată formula **transformării Laplace inverse**.

Această formulă, numită şi *formula Mellin-Fourier* (sau *Bromwich-Wagner*), este o generalizare a transformării Fourier integrale. Ea stabileşte că fiecărei transformate Laplace *F(s)* îi corespunde o funcție original dată de relația:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{j}} \int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty} F(s)\exp(st)\,\mathrm{d}\,s, \quad t \geq 0, \quad \mathrm{j} = \sqrt{-1} \qquad (5.46)$$

În relația (1.3) *c* este mai mare decât abscisa α de convergență simplă, iar integrarea se face în lungul dreptei $s = c$.

Transformarea Laplace inversă se notează în mod obişnuit cu $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.

Într-o situație extrem de frecvent întâlnit în calcule curente, funcția *F(s)* se exprimă ca raportul dintre două polinoame în care gradul numărătorului fiind mai mic decât gradul numitorului:

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \qquad (5.47)$$

Pentru a determina funcția original, cel mai simplu este să descompunem expresia *F(s)* în fracții simple:

$$F(s) = \sum_{k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{C_{kj}}{(s - s_k)^j} \tag{5.48}$$

În expresia (5.48) s_k sunt soluțiile, multiple de ordinul m_k , ale polinomului *N(s)*, iar coeficienții dezvoltării C_{kj} sunt dați de relația:

$$C_{kj} = \lim_{s \to s_k} \frac{1}{(m_k - j)!} \frac{\mathrm{d}^{m_k - j}}{\mathrm{d}\, s^{m_k - j}} \left[\frac{(s - s_k)^{m_k} M(s)}{N(s)} \right] \tag{5.49}$$

Aplicând transformata Laplace inversă vom obține funcția original:

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{M(s)}{N(s)}\right] = \sum_{k} \sum_{j=1}^{m_k} \frac{C_{kj}}{(j-1)!} t^{k-1} \exp(s_k t) \tag{5.50}$$

Relația (5.50) este cunoscută sub numele de teorema generală a dezvoltării lui Heveaside. Dacă toate rădăcinile numitorului sunt simple, relația (5.50) capătă simplificări substanțiale pentru următoarele situații:

1) Dacă numitorul nu are printre rădăcini şi soluția $s = 0$, caz în care funcția *F(s)* se poate scrie $F(s) = \dfrac{M(s)}{N(s)}$, atunci funcția original va fi:

$$f(t) = \sum_{k} \frac{M(s_k)}{N^{'}(s_k)} \exp(s_k t) \quad N(s_k) = 0 \quad s_k - \text{polii functiei} \quad F(s) \tag{5.51}$$

2) Dacă numitorul are printre rădăcini şi soluția $s = 0$, caz în care funcția *F(s)* se poate scrie $F(s) = \dfrac{M(s)}{sP(s)}$, *N(s)=sP(s),* atunci funcția original va fi:

$$f(t) = \frac{M(0)}{P(0)} + \sum_{k} \frac{M(s_k)}{s_k P^{'}(s_k)} \exp(s_k t) \quad P(s_k) = 0 \quad s_k - \text{polii functiei} \quad F(s) \tag{5.52}$$

Formulele de calcul ale funcțiilor original (5.51) şi (5.52) rămân valabile şi în cazul în care funcțiile *M(s)* şi *N(s)* nu sunt polinomiale

(funcții oarecare), cu singura restricție ca zerourile s_k ale funcției *N(s)* să fie simple.

Expresiile de mai sus de calcul a funcției original pentru funcții tip raport, se mai numesc şi **relaţiile lui Heveaside**.

Transformata Laplace a unor funcţii de timp

Funcția original *f(t)*	Transformata Laplace *F(s)*
C (constantă)	$\frac{C}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{\pm\alpha t} = \exp(\pm\alpha t)$	$\frac{1}{s \pm \alpha}$
$t\,e^{\pm\alpha t} = t\exp(\pm\alpha t)$	$\frac{1}{(s \pm \alpha)^2}$
$\frac{1}{\alpha}(1-\exp(-\alpha t))$	$\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s+\alpha}\right)$
$\sin \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
$\cos \alpha t$	$\frac{s}{s^2+\alpha^2}$
$\mathrm{sh}\, \alpha t$	$\frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
$\mathrm{ch}\, \alpha t$	$\frac{s}{s^2-\alpha^2}$
$t \sin \alpha t$	$\frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$

$t\cos\alpha t$	$\dfrac{s^2-\alpha^2}{\left(s^2+\alpha^2\right)^2}$
$\exp(-\beta t)\sin\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$
$\exp(-\beta t)\cos\alpha t$	$\dfrac{s+\beta}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$
$\exp(-\beta t)\,\mathrm{sh}\,\alpha t$	$\dfrac{\alpha}{(s+\beta)^2-\alpha^2}$

Pentru a evita dificultățile legate de integrarea directă a sistemului de ecuații integro-diferențiale, se aplică transformarea Laplace. Ținând cont de teoremele liniarității, derivatei şi a integralei (uşor de demonstrat pentru transformata Laplace) şi notând $L\{i(t)\}=I,\quad L\{u(t)\}=U,\quad L\{e(t)\}=E$, se obține următorul sistem de *ecuații operaționale* ale circuitului:

$$\sum_{k\in(j)} I_k = 0,\quad j=1,2,\ldots,n-1,$$

$$\sum_{k\in(p)}\left\{R_k I_k + L_k[sI_k - i_k(0)] + \sum_{h(\neq k)} L_{kh}[sI_h - i_h(0)] + \frac{1}{sC_k}I_k + \frac{1}{s}u_{C_k}(0)\right\} = \sum_{k\in(p)} E_k \qquad (5.53)$$

În relația (5.53) $i_k(0)$ şi $u_k(0)$ sunt valorile la momentul $t=0_+$ imediat următor comutării (sau accidentului) ce a declanşat procesul tranzitoriu investigat.

Relațiile (5.53) reprezintă un sistem de ecuații algebrice, liniare şi (în general) neomogene, având ca variabile imaginare operaționale I_k ale intensităților necunoscute ale curenților. Numărul l al necunoscutelor fiind egal cu numărul ecuațiilor sistemului, soluția acestuia este unică şi se găseşte fără dificultate prin metodele proprii algebrei liniare.

Formal, cu această rezolvare, analiza regimului tranzitoriu se poate considera încheiată. Însă mai rămâne de parcurs etapa trecerii

de la imaginile aflate ale mărimilor caracteristice ale circuitului la funcțiile original corespunzătoare.

Să mai remarcăm că ecuația a doua a lui Kirchhoff în formă operațională se mai poate scrie în modul următor:

$$\sum_{k\in(p)}\left[\left(R_k + sL_k + \frac{1}{sC_k}\right)I_k + \sum_{h(\neq k)} sL_{kh}I_h\right] = \sum_{k\in(p)}\left[E_k + L_k i_k(0) + \sum_{h(\neq k)} L_{kh} i_h(0) - \frac{1}{s}u_{C_k}(0)\right] \quad (5.54)$$

Separând astfel în membrul stâng căderile operaționale de tensiune:

- Rezistivă $R_k I_k$
- Inductivă: $sL_k I_k + \sum_{h(\neq k)} sL_{kh} I_h$
- Capacitivă: $\frac{1}{sC_k} I_k$

Grupând în membrul drept, alături de imaginile operaționale E_k ale t.e.m. ale surselor, şi termenii care se datorează condițiilor inițiale nenule în care s-a aflat circuitul, în mod formal aceştia se pot considera ca t.e.m. operaționale ale unor surse fictive, de expresie:

$$E_{L_k} = L_k i_k(0) + \sum_{h(\neq k)} L_{kh} i_h(0)$$
$$E_{C_k} = -\frac{1}{s} u_{C_k}(0) \quad (5.55)$$

Impedanța operațională a unei laturi este prin definiție raportul dintre imaginile operaționale ale tensiunii la bornele laturii şi intensitățile curentului ce o parcurge, circuitul fiind operațional pasivizat (adică fizic pasivizat în condiții inițiale zero):

$$Z_k = \frac{U_k}{I_k} \quad \text{pentru } \forall\ E_h, i_{L_h}(0), u_{C_h}(0) = 0; \quad (5.56)$$

Impedanțele operaționale ale rezistorului, bobinei (necuplate magnetic) şi a condensatorului (toate ideale) sunt astfel:

$$Z_R = R \quad Z_L = sL \quad Z_C = \frac{1}{sC} \tag{5.57}$$

Dacă bobinele din laturi diferite ale circuitului sunt cuplate magnetic, se defineşte, în aceleaşi condiţii de pasivizare, <u>*impedanţa operaţional mutuală*</u> între laturile (bobinelor) respective:

$$Z_{kh} = \frac{U_k}{I_h} = sL_{kh} \quad \text{pentru } \forall\, E_h, i_{L_h}(0), u_{C_h}(0) = 0; \tag{5.58}$$

În aceste condiţii cele două teoreme a lui Kirchhoff în forma operaţională, se scriu:

$$\sum_{k\in(j)} I_k = 0, \quad 1,2\ldots,n-1$$
$$\sum_{k\in(p)}\left(Z_k I_k + \sum_{h(\neq k)} Z_{kh} I_h\right) = \sum_{k\in(p)}\left(E_k + E_{L_k} + E_{C_k}\right), \quad p = 1,2\ldots,b \tag{5.59}$$

Acestea pot fi enunţate astfel:

1. Suma algebrică a imaginilor operaţionale ale intensităţilor curenţilor din laturile incidente la nod este nulă.
2. Suma algebrică a căderilor operaţionale de tensiune pe laturile unei bucle a circuitului este egală cu suma algebrică a t.e.m. operaţionale, fizice şi fictive, din aceleaşi laturi (toate luate în raport cu un sens dat de parcurgere a buclei).

Asemănarea formală a ecuaţiilor scrise cu ajutorul celor două teoreme ale lui Kirchhoff în forma operaţională, cu ecuaţiile stabilite pentru circuitele funcţionând în unele regimuri particulare (curent continuu, curent alternativ), arată că pentru rezolvarea lor se pot folosi metodele destinate regimurilor respective (superpoziţie, curenţi ciclici, potenţiale la noduri etc.).

Pentru aplicarea corectă a metodei este util ca ecuaţiilor (5.59) să li se asocieze o <u>*schemă operaţională echivalentă*</u>, schemă în care elementelor de circuit li se ataşează impedanţa operaţională şi în care, în afara imaginilor operaţionale ale t.e.m. pentru sursele reale,

figurează şi t.e.m. operaționale fictive, corespunzătoare unor condiții inițiale diferite de zero.

Corespunzător ecuațiilor date de cele două teoreme a lui Kirchhoff în forma operațională se pot identifica circuitele **echivalente operaţionale ale elementelor ideale pasive**.

1. Rezistorul ideal:

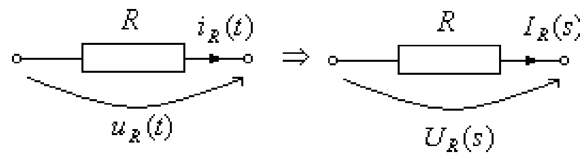


Fig.5.12 Schema operațională echivalentă pentru rezistorul ideal.

Aşa cum se poate observa din Fig.5.12 schema echivalentă operațională a rezistorul nu suferă nici o modificare structurală față de schema sa din domeniul timp.

2.Bobina ideală necuplată magnetic

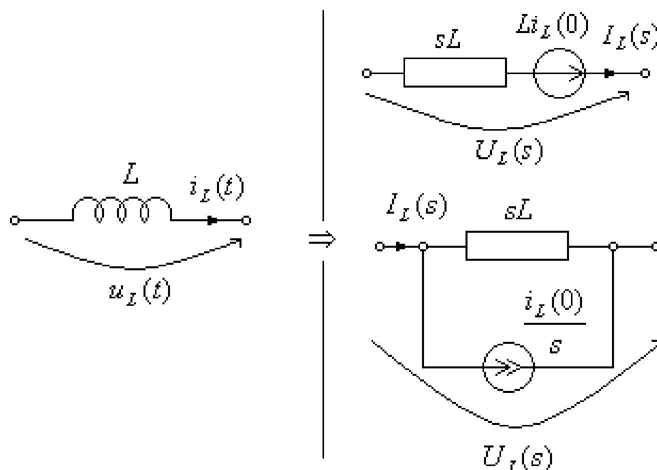


Fig.5.13 Schema operațională echivalentă pentru bobină ideală necuplată magnetic.

Aşa cum se poate observă, bobina ideală acceptă două scheme operaţionale echivalente: serie, respectiv paralel. În cazul schemei serie bobina este înlocuită cu o impedanţă de valoare *sL* şi o sursă de tensiune de valoarea fluxului iniţial prin bobină: $Li_L(0)$. Pentru schema paralel, impedanţa *sL* este legată în derivaţie cu o sursă de curent de valoare $i_L(0)/s$. De remarcat că în cazul bobinei ideale sensul surselor de energie, pentru ambele scheme este dat de curentul iniţial prin bobină. De cele mai multe ori, în aplicaţii, este folosită schema serie.

3. Condensatorul ideal

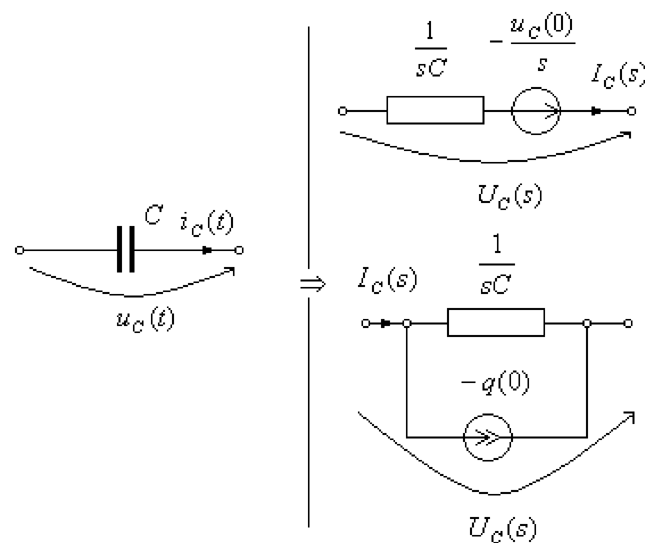


Fig.5.14 Schema operaţională echivalentă pentru condensatorul ideal.

Condensatorul ideal, ca şi bobina ideală, acceptă două scheme operaţionale echivalente: serie respectiv, paralel. În cazul schemei serie condensatorul este înlocuit cu o impedanţă de valoare $1/sC$ şi o sursă de tensiune de valoare $-u_C(0)/s$. Pentru schema paralel, impedanţa $1/sC$ este legată în derivaţie cu o sursă de curent de valoare $-q(0)$. Prin urmare, sensurile surselor de energie sunt invers decât sensul tensiunii cu care era iniţial încărcat condensatorul. Ca şi în cazul bobinei, schema serie este mai folosită decât schema paralel.

4. Bobine ideale cuplate magnetic

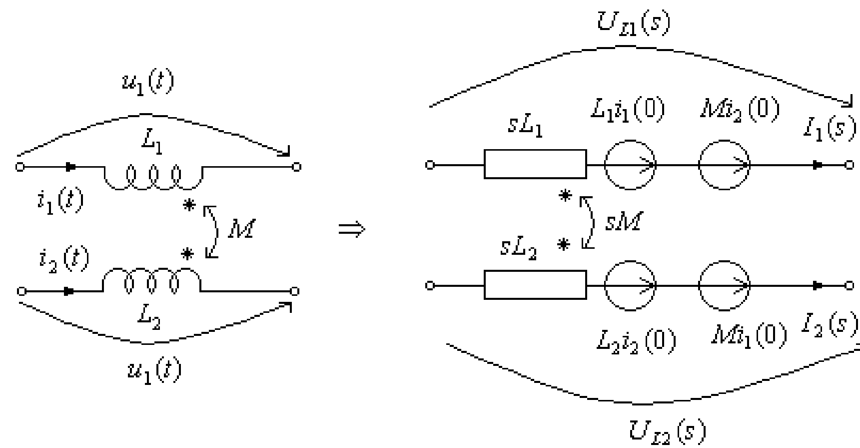


Fig.5.15 Schema operaţională echivalentă pentru două bobine ideale cuplate magnetic.

Prin urmare conform Fig. 5.15, bobinele cuplate se înlocuiesc fiecare cu câte o impedanţă operaţională sL_1, respectiv, sL_2 , cuplajul cu impedanţa operaţională de cuplaj sM iar sursele de tensiune cu valorile fluxurilor iniţiale prin fiecare bobină: $\varphi_1(0) = L_1 i_1(0) \pm M i_2(0)$, respectiv $\varphi_2(0) = L_2 i_2(0) \pm M i_1(0)$. Semnul $\pm$depinde de poziţia bornelor polarizate faţă de curenţii iniţiali prin bobine. De menţionat că şi pentru două bobine ideale cuplate magnetic se poate imagina o schemă echivalentă paralel dacă se folosesc surse de curent comandate prin curent în circuit. Acest lucru ar duce însă la complicarea schemei operaţionale şi a modului de rezolvare.

5. Sursele ideale de tensiune şi curent.

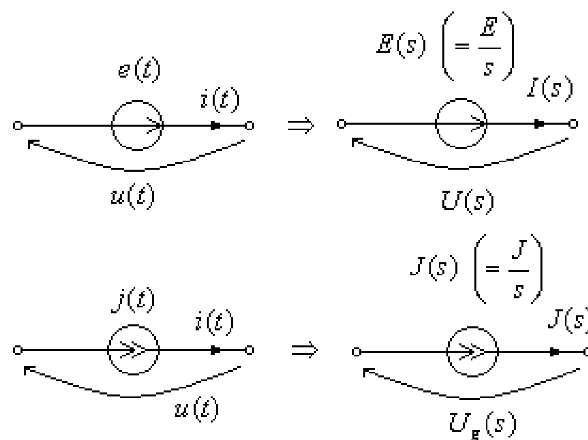


Fig.5.16 Schema operaţională echivalentă pentru sursa ideală de tensiune.

Aşa cum se poate observa şi din Fig.5.16, imaginea în operaţional a sursei ideale de tensiune, respectiv de curent, este transformata Laplace a funcţiei de timp pe care sursa o exprimă. Dacă sursa este o funcţie de timp constantă E sau J, atunci imaginea ei în operaţional este conform tabelului de imagini ale funcţiilor în operaţional : E/s respectiv J/s. Cazul este destul de des întâlnit în aplicaţii. Din aceste motive l-am prezentat în paranteză pentru ambele surse în Fig.5.16. Expresia instantanee a tensiunii la bornele bobinei respectiv, ale condensatorului se determină, ţinând seama şi de condiţiile iniţiale în general diferite de zero, prin relaţiile:

$$\begin{aligned} u_{L_k}(t) &= L^{-1}\left\{ sL_k I_k + \sum_{h\neq(k)} sL_{kh} I_k - L_k i_k(0) - \sum_{h\neq(k)} L_{hk} i_h(0) \right\} \\ u_{C_k}(t) &= L^{-1}\left\{ \frac{1}{sC_k} I_k + \frac{1}{s} u_{C_k}(0) \right\} \end{aligned} \qquad (5.60)$$

Algoritmul metodei operaţionale de rezolvare a circuitelor în regim tranzitoriu

Ţinând seama de cele stabilite în subcapitolul precedent, metoda de rezolvare operaţională a circuitelor electrice liniare cuprinde următoarele etape:

1. Se determină condiţiile iniţiale ale circuitului (curenţii din bobine şi tensiunile la bornele condensatoarelor) înainte de începerea regimului tranzitoriu (comutaţie sau accident).
2. Se formează schema echivalentă operaţională a circuitului, cu sursele date şi cu sursele fictive echivalente condiţiilor iniţiale. În schemă mărimile se notează cu simboluri operaţionale (în *s*).

3. Se aplică forma operațională a ecuațiilor lui Kirchhoff, obținându-se ecuațiile operaționale ale circuitului. Aceste ecuații se rezolvă în raport cu imaginile funcțiilor necunoscute.
4. Se calculează imaginile funcțiilor de timp date (de obicei tensiuni electromotoare) cu transformarea directă sau cu tabele de transformări. Introducând aceste imagini în expresiile funcțiilor necunoscute, se obțin imaginile funcțiilor necunoscute ca funcții explicite de variabilă complexă s.
5. Se determină funcțiile original (de timp) necunoscute, folosind metodele de inversiune. (Relația Mellin-Fourier, Heveaside sau tabele cu funcții original).

5.6 ANALIZA REGIMULUI TRANZITORIU PRIN METODA VARIABILELOR DE STARE

O importantă simplificare în rezolvarea sistemului de ecuații general variabile în timp (1.1) ale unui circuit electric se poate obține atunci când acesta nu conține integrale ale mărimilor necunoscute. Acest lucru se poate obține caracterizând bobina ideală prin intensitatea i_L a curentului ce o parcurge iar condensatorul ideal prin tensiunea u_C la bornele sale.

Dacă se elimină şi necunoscutele cu o funcție pur algebrică (de exemplu intensitățile curenților din laturi ce conțin numai rezistoare sau surse ideale de tensiune), numărul ecuațiilor reținute devine egal cu numărul $N_L + N_C = N$ al elementelor reactive din circuit, adică chiar cu numărul necunoscutelor: intensitățile curenților prin bobine i_{L_k} ($k = 1,\ldots, N_L$) şi tensiunea la bornele condensatoarelor u_{C_k} ($k = 1,\ldots, N_C$).]. Acesta este totodată chiar ordinul sistemului de ecuații al circuitului.

Reținerea variabilelor i_L şi u_C este avantajoasa pentru faptul că ele sunt singurele mărimi caracteristice ce descriu starea circuitului, ale căror valori la momentul t_0 pot fi determinate independent, pe baza unei simple analize a comportării circuitului. Pe de altă parte rezolvarea sistemului de ecuații arată că aceste variabile pot fi univoc determinate la orice moment $t > t_0$ tocmai atunci când se cunosc valorile lor inițiale, ca şi, bineînțeles, sursele de excitație ce acționează în circuit.

Alegerea făcută este convenabilă deoarece prezintă şi posibilitatea unui calcul simplu al energiei totale acumulate în orice moment în circuit:

$$W(t) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{N_L}\sum L_{jk} i_j i_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_C} C_k u_{C_k}^2 \qquad (5.61)$$

Din motivele mai sus menționate, ansamblul mărimilor i_{L_k} şi u_{C_k}, ordonat într-un mod oarecare într-o matrice coloană, este numit vectorul de stare al sistemului (circuitului):

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_{L_1}(t) \\ \vdots \\ i_{L_{N_L}}(t) \\ u_{C_1}(t) \\ \vdots \\ u_{C_{N_C}}(t) \end{bmatrix}. \qquad (5.62)$$

iar elementele sale componente se numesc *variabile de stare* ale circuitului.

În principiu este întotdeauna posibilă aranjarea celor N ecuații ce conțin numai variabile de stare, astfel încât derivatele de ordin întâi ale acestor mărimi să fie exprimate sub forma unor combinații liniare ale mărimilor, la care se adaugă evident şi termenii datorați mărimilor de excitație. Sistemul poate fi atunci pus sub următoarea formă matriceală:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)] = [A][x(t)] + [B][y(t)]\,, \tag{5.63}$$

numită ecuația de starea a circuitului.

În ecuația (5.63) avem:

- $[y(t)]$ – matricea coloană a surselor de excitație, numită *vectorul de intrare* al circuitului;
- $[A]$ – o matrice pătrată nesingulară de ordin N, cu elemente constante (în cazul circuitelor liniare cu parametri concentrați, aici studiate), numită *matricea coeficienților vectorului de stare*;
- $[B]$ – o matrice cu N linii şi un număr de coloane egal cu numărul mărimilor de excitație, ale cărei elemente sunt de asemenea constante, numită *matricea coeficienților vectorului de intrare.*

Soluția ecuației maticeale (5.63), în condiții precizate, are expresia:

$$[x(t)] = [\Phi(t-t_0)][x(t_0)] + \int_{t_0}^{t} [\Phi(t-\tau)][B][y(\tau)]\,\mathrm{d}\,\tau \tag{5.64}$$

în care $[x(t_0)]$ este matricea coloană a condițiilor inițiale ale circuitului, iar:

$$[\Phi(t)] = \exp\{[A]t\} \tag{5.65}$$

este o funcție de matrice e o formă particulară, numită matrice de *tranziție a sistemului* a sistemului.

Se observă că soluția (1.20) conține doi termeni distincți în care au fost localizate şi strict delimitate efectele unor condiții inițiale nenule:

$$[x_i(t)] = [\Phi(t-t_0)][x(t_0)] \tag{5.66}$$

şi respectiv ale surselor de excitație existente în circuit:

$$[x_0(t)] = \int_{t_0}^{t} [\Phi(t-\tau)][B][y(\tau)]\,\mathrm{d}\,\tau = \int_{t_0}^{t} [\Phi(\tau)][B][y(t-\tau)]\,\mathrm{d}\,\tau \tag{5.67}$$

În multe situații este posibilă găsirea unei soluții particulare a ecuațiilor matriceale (5.67). Dacă sursele de excitație sunt, aşa cum de fapt se întâmplă cel mai adesea, constante sau periodic variabile în

timp, aceasta este totodată şi soluția forțată, de regim permanent a circuitului $[x_f(t)]$ şi atunci soluția generală poate fi scrisă sub forma:

$$[x(t)] = [\Phi(t - t_0)]([x(t_0)] - [x_f(t_0)]) + [x_f(t)] \tag{5.68}$$

determinarea ei fiind considerabil simplificată, deoarece se evită calculul integralelor din relația (1.20).

Calculul matricei de tranziție

Una din cele mai dificile etape în aplicarea metodei variabilelor de stare este calculul matricei de tranziție.

Prin definiție, o funcție de matrice dată $[A]$ este o corespondență ce asociază unei funcții exprimabilă ca o serie (finită sau infinită) de puteri a variabilei:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n \text{ sau } \infty} a_k x^k \text{ , matricea } f([A]) = \sum_{k=0}^{n \text{ sau } \infty} a_k [A]^k \tag{5.69}$$

Realizarea acestei corespondențe este posibilă numai cu condiția ca valorile proprii λ_i ale matricei $[A]$, adică soluțiile ecuației caracteristice:

$$g(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda[I] - [A]) = 0 \tag{5.70}$$

în care $[I]$ este matricea unitate de ordin n, să aparțină domeniului de definiție a funcției $f(x)$.

Dintre diferitele metode de calcul a matricei de tranziție, în cele ce urmează vom ilustra metoda Caley – Hamilton.

Teorema Caley – Hamilton afirmă că orice matrice pătrată $[A]$ îşi satisface propria ecuație caracteristică:

$$g([A]) = [0]\,. \tag{5.71}$$

În adevăr, întrucât polinomul caracteristic $g(\lambda)$ al unei matrici de ordinul n are tot gradul n:

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k \text{ ,} \tag{5.72}$$

Din teorema Caley – Hamilton rezultă:

$$g([A]) = \sum_{k=0}^{n} b_k [A]^k = [0], \tag{5.73}$$

ceea ce înseamnă că puterea n a matricei se poate întotdeauna exprima liniar în funcție de primele n -1 puteri ale sale.

Generalizând acest rezultat, apare posibilitatea exprimării funcției de matrice [A] sub forma unui polinom de gradul (n – 1) în matricea respectivă:

$$f([A]) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k [A]^k = P[A], \tag{5.74}$$

Pe de altă parte, este relativ uşor de arătat că valorile proprii ale matricei [A] sunt în acelaşi timp soluții ale ecuației:

$$f(\lambda) - P(\lambda) = 0, \tag{5.75}$$

cu acelaşi ordin de multiplicitate ca şi în ecuația caracteristică.

Coeficienții c_k ai dezvoltării (5.74) se pot atunci determina rezolvând sistemul format de ecuațiile:

$$P(\lambda_i) = f(\lambda_i) \tag{5.76}$$

câte una pentru fiecare valoare proprie λ_i simplă a matricei [A] şi:

$$P^{(h)}(\lambda_i) = f^{(h)}(\lambda_i), \qquad h = 0,1,\ldots m_i - 1. \tag{5.77}$$

câte una pentru fiecare valoare proprie λ_i multiplă de ordin m_i.

Se obțin astfel $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$, ecuații, unde p este numărul valorilor proprii distincte ale matricei [A], fiecare cu ordinul de multiplicitate corespunzător.

În cazul particular în care avem **doar două elemente reactive**: o singura bobină si un singur condensator şi toate sursele de excitație **sunt constante în timp**, ecuațiile de mai sus se simplifică considerabil. În acest caz curentul prin bobină şi tensiunea la bornele condensatorului se determină din ecuația:

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = [b_0[I] + b_1[A]] \begin{bmatrix} i_{L0} - i_{Lp} \\ u_{C0} - u_{Cp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{Lp} \\ u_{Cp} \end{bmatrix} \qquad (5.78)$$

În ecuația (1.35) dacă t_0 este momentul comutației avem :

- i_{L0} şi u_{C0} condițiile inițiale ale circuitului: valoarea curentului prin bobină respectiv a tensiunii la bornele condensatorului **înainte de comutaţie** ($t < t_0$).
- i_{Lp} şi u_{Cp} valorile de regim permanent ale curentului prin bobină şi a tensiunii la bornele condensatorului; **la mult timp după comutaţie** ($t >> t_0$, $t \to \infty$).

Valorile lui b_0 şi b_1 se determină din ecuația (5.78) astfel:

1. Dacă cele două valori proprii ale are matricei [A] sunt distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ atunci b_0 şi b_1 rezultă din ecuațiile:

$$\begin{cases} \exp(\lambda_1 t) = b_0 + b_1 \lambda_1 \\ \exp(\lambda_2 t) = b_0 + b_1 \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = \dfrac{\lambda_1 \exp(\lambda_2 t) - \lambda_2 \exp(\lambda_1 t)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ b_1 = \dfrac{\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases} \qquad (5.79)$$

Observație: Dacă cele două rădăcini λ_1 şi λ_2 sunt complexe, de cele mai multe ori se folosesc relațiile matematice de exprimare a funcțiilor trigonometrice funcție de exponențiale:

$$\sin \alpha t = \frac{\exp(\mathrm{j}\alpha t) - \exp(-\mathrm{j}\alpha t)}{2\mathrm{j}}; \quad \cos \alpha t = \frac{\exp(\mathrm{j}\alpha t) + \exp(-\mathrm{j}\alpha t)}{2} \qquad (5.80)$$

2. Dacă cele două valori proprii ale are matricei [A] sunt egale $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ cu ordin de multiplicitate 2 atunci b_0 şi b_1 rezultă din ecuațiile:

$$\begin{cases} \exp(\lambda t) = b_0 + b_1 \lambda \\ t \exp(\lambda t) = b_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = [1 - \lambda t] \exp(\lambda t) \\ b_1 = t \exp(\lambda t) \end{cases} \qquad (5.81)$$

5.7 STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU PRIN SEPARAREA COMPONENTEI DE REGIM PERMANENT

În numeroase aplicații, soluția de regim permanent se poate determina fără dificultăți, cu metode cunoscute şi este preferabil să se utilizeze calculul operațional numai pentru studiul regimului liber, cu condițiile inițiale corespunzătoare regimului tranzitoriu. Ecuațiile regimului liber sunt ecuațiile obținute prin anularea surselor de energie (pasivizare a acestora) şi prin introducerea surselor de energie echivalente condițiilor inițiale pentru componentele de regim liber.

Soluția generală este:

$$x(t) = x_l(t) + x_p(t) \tag{5.82}$$

Soluția de regim permanent $x_p(t)$ se determină ca soluție separată după definitivarea regimului tranzitoriu – de cele mai multe ori o soluție de curent continuu sau alternativ.

Soluția de regim liber $x_l(t)$ se determină după pasivizarea surselor de alimentare cu condițiile inițiale $x_l(0) = x(0) - x_p(0)$ în care $x(0)$ reprezintă condiția inițială, adică este curentul prin bobine sau tensiunile pe condensatoare *înainte* de începerea regimului tranzitoriu, iar $x_p(0)$ reprezintă valoarea soluției permanente în momentul *t=0*, *de începere* a regimului tranzitoriu.

Această metodă este foarte utilă în cazul în care sursele de energie sunt sinusoidale şi aplicarea directă a metodei operaționale ar duce la calcule matematice complicate.

6.

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM PERMANENT CU SURSE COMANDATE

6.1 SURSE COMANDATE – BREVIAR

Sursele comandate (*dependente*) sunt surse la care tensiunea sau intensitatea curentului electric depind de mărimi ale circuitului în care este conectată sursa. O sursă comandată este un element cuadripol cu două laturi: latura de comandă căreia îi este asociată *mărimea de comandă* şi latura comandata care conține *mărimea comandată* (sursa). *Cele două laturi trebuie să facă parte din acelaşi circuit, fără a coincide.*

Sursele comandate sunt elemente diport active. În toate cazurile nu se absoarbe putere la intrare, dar se dă putere la ieşire. Spre deosebire de sursele independente, care sunt folosite ca mărimi de intrare (excitație) ale unui circuit, sursele liniare comandate sunt utilizate pentru modelarea unor dispozitive electrice de putere sau electronice.

Există patru tipuri de surse comandate, care se pot clasifica în două categorii:

I. *surse omogene*

1. sursa de tensiune comandată în tensiune $e_c(u_c)$;
2. sursa de curent comandată în curent $j_c(i_c)$;

II. *surse neomogene*

1. sursa de tensiune comandată în curent $e_c(i_c)$;
2. sursa de curent comandată în tensiune $j_c(u_c)$

Dacă o sursă $e_c(u_c)$ ($j_c(i_c)$) este caracterizată de ecuaţiile $i_1 = 0$, $u_2 = A_U(t) \cdot u_1$, respectiv $u_1 = 0$, $i_2 = A_i(t) \cdot i_1$,unde funcţia de timp este dată, atunci sursa $e_c(u_c)$ ($j_c(i_c)$) este o sursă liniară variabilă în timp şi comandată.

Dacă o sursă $e_c(u_c)$ ($j_c(i_c)$) este caracterizată de ecuaţiile $i_1 = 0$, $u_2 = f(u_1)$, respectiv $u_1 = 0, i_2 = f(i_1)$, unde $f(\bullet)$ este o funcţie neliniară dată, atunci sursa $e_c(u_c)$ ($j_c(i_c)$) este o sursă neliniară comandată.

6.1.1 SURSE COMANDATE LINIAR

Iată în continuare reprezentare celor patru tipuri de surse comandate liniar.

1. *sursa de tensiune comandată în tensiune (STCT)*

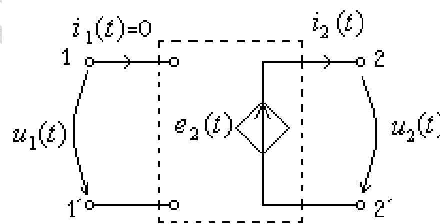


Fig.6.1 Reprezentarea schematică a sursei de tensiune comandate în tensiune

$i_1(t) = 0$ $\quad$ $p_1(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) = 0$ $\quad$ A_U - amplificare în tensiune

$e_2(t) = A_U \cdot u_1(t)$ $\quad$ $p_s(t) = u_2(t) \cdot i_2(t) \neq 0$

2. *sursa de tensiune comandată în curent (STCC)*

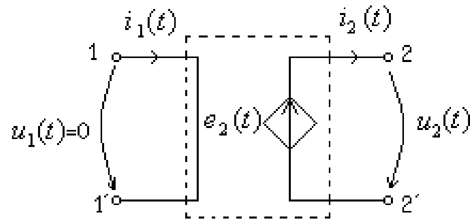


Fig.6.2 Reprezentarea schematică a sursei de tensiune comandate în curent

$$u_1(t) = 0 \qquad p_1(t) = u_1(t)\cdot i_1(t) = 0$$
$$e_2(t) = r\cdot u_1(t) \qquad p_s(t) = u_2(t)\cdot i_2(t) \neq 0$$

r - rezistență de comandă = rezistență de transfer (transrezistență)

3. *sursa de curent comandată în tensiune (SCCT)*

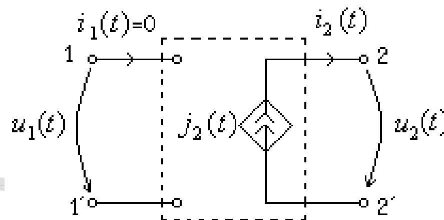


Fig.6.3 Reprezentarea schematică a sursei de curent comandate în tensiune

$$i_1(t) = 0 \qquad p_1(t) = u_1(t)\cdot i_1(t) = 0$$
$$j_2(t) = g\cdot u_1(t) \qquad p_s(t) = u_2(t)\cdot i_2(t) \neq 0$$

g - conductanță de comandă = conductanță de transfer (transconductanță)

4. *sursa de curent comandată în curent (SCCC)*

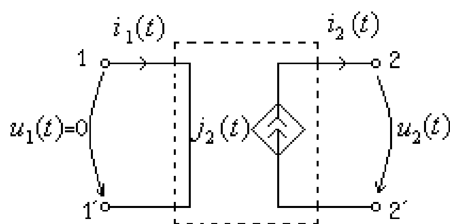


Fig.6.4 Reprezentarea schematică a sursei de curent comandate în curent

$$u_1(t) = 0 \qquad p_1(t) = u_1(t)\cdot i_1(t) = 0$$
$$j_2(t) = A_I \cdot i_1(t) \qquad p_s(t) = u_2(t)\cdot i_2(t) \neq 0$$

A_I - amplificare în curent

6.1.2 SURSE COMANDATE NELINIAR

Deoarece programele de calcul nu pot recunoaşte sursele comandate neliniar, fiecare dintre aceste elemente este reprezentat prin câte două circuite echivalente realizate numai cu rezistoare neliniare comandate (în curent sau tensiune) şi surse comandate liniar. Acest capitol îşi propune abordarea circuitelor cu surse comandate liniar, cazul celor neliniar comandate reprezentând un subiect mai dificil de dezbătut si asimilat.

6.1.3 PROPRIETĂŢILE SURSELOR COMANDATE

1) Analiza circuitelor cu surse comandate utilizează aceleaşi metode de rezolvare ca şi problemele cu surse independente. Se impun totuşi nişte precizări:

a) în general, valorile semnalelor de comandă I_k şi U_k nu sunt cunoscute, dar acestea sunt variabile ale circuitului şi se calculează folosind ecuațiile de comandă;

b) <u>*sursele comandate nu pot fi pasivizate*</u> pentru a facilita analiza, pentru că aceasta ar anula relația dintre sursa comandată şi mărimea de comandă. Pentru a găsi rezistența (respectiv, impedanța echivalentă în complex, pentru circuitele în curent alternativ) a circuitului la o poartă (sau

schemele echivalente Thévenin şi Norton) se aplică una dintre următoarele metode:

- se calculează tensiunea de mers în gol şi curentul de scurtcircuit între bornele respective, rezultând $R_e = \frac{U_{gol}}{I_{sc}}$ (respectiv $\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_{gol}}{\underline{I}_{sc}}$);
- se pasivizează toate sursele independente, păstrându-le pe cele comandate şi se aplică o tensiune oarecare U (de obicei, se alege o sursă independentă de 1V) la poarta respectivă, calculând curentul I debitat de sursă. (Sau se aplică la poarta respectivă o sursă de curent oarecare – de obicei, o sursă independentă de 1A – şi se calculează tensiunea la bornele sursei). Raportul $\frac{U}{I} = R_e$ (sau, respectiv, $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_e$).

2) De asemenea, bobinele cuplate magnetic pot fi simulate prin scheme echivalente formate din bobine ideale şi surse de tensiune comandate în curent, conform figurii de mai jos:

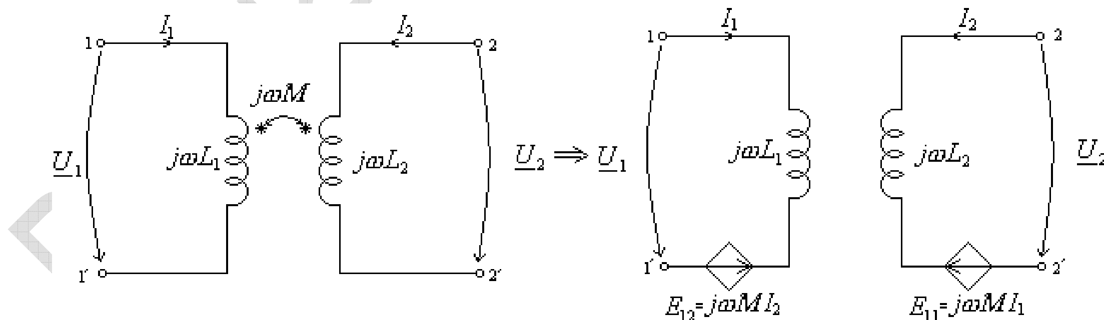


Fig.6.5. Desfacerea cuplajului magnetic cu ajutorul surselor comandate

3) Transformarea rezistenței.

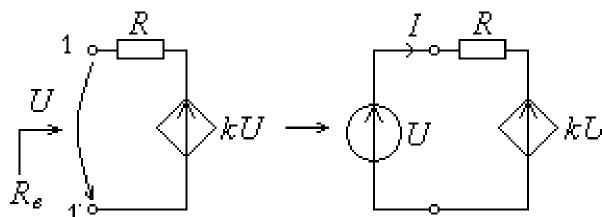


Fig.6.6. Transformarea rezistenței

$$R_e = \frac{U}{I} = \frac{U}{\dfrac{U - kU}{R}} = \frac{R}{1-k}$$

a. k = 0: Sursa comandată se comporta ca un şunt şi $R_e = R$;

b. 0 ≤ k ≤ 1: Căderea de tensiune efectivă pe R este mai mică decât tensiunea aplicată circuitului, ducând la scăderea curentului şi $R \le R_e \le \infty$;

c. k ≤ 0: Sursa comandată are polaritatea opusă sursei independente aplicată circuitului, astfel încât căderea efectivă de tensiune pe R este mai mare decât valoarea tensiunii aplicate. Aceasta determină o creştere a valorii curentului şi deci o scădere a rezistenței aparente $0 \le R_e \le R$;

d. k >1: Deoarece valoarea sursei comandate este mai mare decât a sursei aplicate, are loc o schimbare a sensului curentului, ceea ce conduce la un regim cu rezistență negativă: $R_e \le 0$. Dacă în cazul rezistenței pozitive sursa aplicată generează putere, în cazul rezistenței negative se primeşte putere.

7.

CUADRIPOLI ŞI FILTRE ELECTRICE

7.1 CUADRIPOLI ELECTRICI – BREVIAR TEORETIC

Cuadripolul este un diport, iar dintre cele patru mărimi ($\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$) numai două sunt independente deoarece anulând tensiunile $\underline{U}_1$ şi $\underline{U}_2$, curenții $\underline{I}_1$ şi $\underline{I}_2$ se anulează.

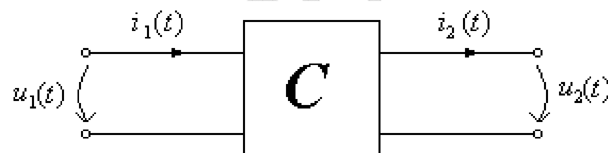


Fig. 7.1. Schema electrică a cuadripolului.

Ecuațiile cuadripolului sunt:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2 \end{cases},$$

unde se notează cu $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, $\underline{D}$ parametrii fundamentali (de transfer) ai cuadripolului şi cu $[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}$ matricea fundamentală a cuadripolului.

1. Interpretarea fizică a parametrilor cuadripolului

Parametrii $\underline{A}$ şi $\underline{D}$ sunt adimensionali, $\underline{B}$ este o impedanță şi $\underline{C}$ este o admitanță cu următoarele interpretări:

$$\underline{A} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} \qquad \underline{B} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0} \qquad \underline{C} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} \qquad \underline{D} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0}$$

- $\underline{A}$ este raportul de transformare al tensiunilor la funcționarea în gol
- $\underline{B}$ este impedanța de transfer la funcționarea în scurtcircuit
- $\underline{C}$ este admitanța de transfer la funcționarea în gol
- $\underline{D}$ este raportul de transformare la funcționarea în scurtcircuit

2. Condiția de reciprocitate

Cuadripolul este reciproc dacă, conectând la bornele de intrare generatorul de tensiune electromotoare $\underline{E}$, curentul $\hat{\underline{I}}_2$ care se stabileşte scurcircuitând bornele de ieşire este egal cu curentul $\hat{\underline{I}}_1$ care se stabileşte conectând la ieşire generatorul $\underline{E}$ şi scurcircuitând bornele de intrare:

$$\left.\underline{I}_2\right|_{\substack{\underline{U}_1=\underline{E}\\ \underline{U}_2=0}} = \left.\hat{\underline{I}}\right|_{\substack{\underline{U}_2=\hat{\underline{U}}_2=\underline{E}\\ \underline{U}_1=0}}$$

Condiţia de reciprocitate este:

$$\underline{A}\cdot\underline{D}-\underline{B}\cdot\underline{C}=1\,.$$

3. Impedanțe caracteristice

Impedanţa caracteristică directă

Se numeşte impedanța caracteristică directă $\underline{Z}_{c1}$, impedanța de sarcină $\underline{Z}_2$, care conectată la bornele secundare ale cuadripolului corespunde unei impedanțe de intrare primară $\underline{Z}_{e1}$ egală cu $\underline{Z}_{c1}$. $\underline{Z}_{e1}$ se numeşte impedanță de intrare primară:

$$\underline{Z}_{c1} = \frac{\underline{A} - \underline{D} \pm \sqrt{(\underline{A} + \underline{D})^2 - 4}}{2\underline{C}} \qquad \underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A} \cdot \underline{Z}_2 + \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{Z}_2 + \underline{D}}.$$

Impedanţa caracteristică inversă

Se numeşte $\underline{Z}_{c2}$ impedanța caracteristică inversă, impedanța de sarcină $\underline{Z}_1$ care conectată la bornele primare ale cuadripolului corespunde unei impedanțe de intrare secundare $\underline{Z}_{e2}$ egală cu $\underline{Z}_{c2}$. $\underline{Z}_{e2}$ se numeşte impedanță de intrare secundară:

$$\underline{Z}_{c2} \frac{\underline{D} - \underline{A} \pm \sqrt{(\underline{D} + \underline{A})^2 - 4}}{2\underline{C}} \qquad \underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{D} \cdot \underline{Z}_1 + \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{Z}_1 + \underline{A}}.$$

4. Tipuri de cuadripoli

Cuadripol în T

Schema cuadripolului în T conține două impedanțe longitudinale $\underline{Z}_{1l}$ şi $\underline{Z}_{2l}$ şi o admitanța transversală $\underline{Y}_t$.

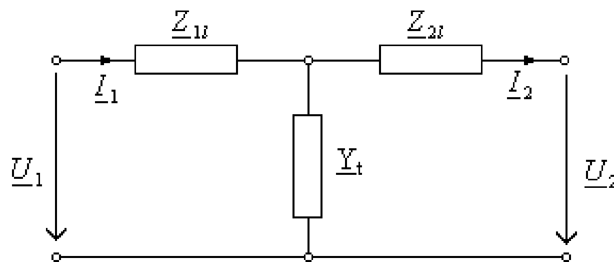


Fig. 7.2 Schema cuadripolului în T.

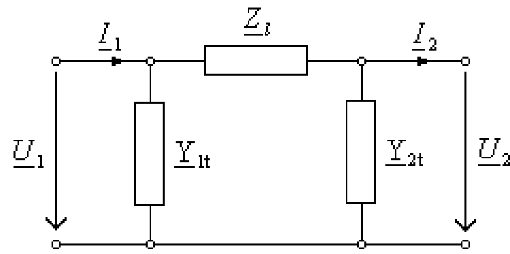
Valorile parametrilor de transfer sunt:

$$\begin{cases} \underline{A} = 1 + \underline{Z}_{1l} \cdot \underline{Y}_t \\ \underline{B} = \underline{Z}_{1l} + \underline{Z}_{2l} + \underline{Y}_t \cdot \underline{Z}_{1l} \cdot \underline{Z}_{2l} \\ \underline{C} = \underline{Y}_t \\ \underline{D} = 1 + \underline{Z}_{2l} \cdot \underline{Y}_t \end{cases}$$

Cuadripol în Π

Schema cuadripolului în Π conține o impedanță longitudinală $\underline{Z}_l$ şi două admitanțe transversale $\underline{Y}_{1t}$ şi $\underline{Y}_{2t}$.

Valorile parametrilor de transfer sunt:



$$\begin{cases} \underline{A} = 1 + \underline{Z}_l \cdot \underline{Y}_{2t} \\ \underline{B} = \underline{Z}_l \\ \underline{C} = \underline{Y}_{1t} + \underline{Y}_{2t} + \underline{Z}_l \cdot \underline{Y}_{1t} \cdot \underline{Y}_{2t} \\ \underline{D} = 1 + \underline{Z}_l \cdot \underline{Y}_{1t} \end{cases}$$

Fig. 7.3. Schema cuadripolului în T.

BIBLIOGRAFIE

1. MOCANU, C., ***Teoria circuitelor electrice***, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
2. MOCANU, C., ***Bazele electrotehnicii- Teoria câmpului electromagnetic***, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1991.
3. RĂDULEȚ R., ***Bazele teoretice ale electrotehnicii***, vol. I, II, III, IV, Tipografia Ministerului Educației şi Învățământului, Bucureşti, 1954 – 1956.
4. TIMOTIN, AL., HORTOPAN, V., IFRIM, A., PREDA, M. ***Lecții de bazele electrotehnicii***, Editura Didactică şi Pedagogică Bucureşti, 1970.
5. ANDRONESCU, Pl. ***Bazele electrotehnicii,*** vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.
6. ANTONIU, I. S. ***Bazele electrotehnicii,*** vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.
7. PREDA, M., CRISTEA, P., SPINEI, F., ***Bazele electrotehnicii*** vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
8. ŞORA, C. ***Bazele electrotehnicii***, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
9. FLUERAŞU C. ***Bazele electrotehnicii*** vol. I, Litografia Institutului Politehnic Bucureşti, 1990.
10. SIMION, E. ***Electrotehnică***, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

11. NICOLAE, Al., ***Curs de bazele electrotehnicii*** vol. I, II, Litografia Institutului Politehnic Bucureşti, 1990.
12. GAVRILĂ, G., ***Elemente de electrocinetică şi electrodinamică***, Editura MATRIX ROM, Bucuresti, 2007.
13. MORARU, A. ***Complemente de Teoria Câmpului Electromagnetic***, Editura MATRIX ROM, Bucuresti, 2003.
14. MORARU, A. ***Bazele Electrotehnicii – Teoria câmpului electromagnetic***, Editura MATRIX ROM, Bucuresti, 2002.
15. MORARU, A. ***Bazele Electrotehnicii – Teoria circuitelor electrice***, Editura MATRIX ROM, Bucuresti, 2002.
16. IORDACHE, M. ***Bazele electrotehnicii***, Editura MATRIX-ROM, Bucuresti, 2008.
17. DUMITRIU, L. ***Bazele electrotehnicii***, Editura MATRIX-ROM, Bucuresti, 2008.
18. PANAITESCU, A., NICULAE, D. ***Bazele electrotehnicii***, Editura MATRIX-ROM, Bucuresti, 2014.
19. IORDACHE, M., DUMITRIU, L. ***Teoria modernă a circuitelor electrice*** -***Fundamentare teoretică, Aplicații, Algoritmi şi Programe de calcul*** Vol. I +II, Editura All Educational S.A., Bucureşti 2000.
20. MIHAI, C. P. ***Electrotehnică aplicată***, vol. I, Editura Printech, Bucureşti 2005.
21. RĂDULEȚ, R. ***Bazele electrotehnicii – Probleme***, vol. I, II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
22. PREDA, M., CRISTEA, P., MANEA, F. (coordonatori) ***Bazele electrotehnicii. Probleme***, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980.
23. PREDA, M., CRISTEA, P., MANEA, F. (coordonatori) ***Probleme de electrotehnică şi Maşini electrice***, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

24. MORARU A., FRĂȚILOIU GH., ***Bazele electrotehnicii. Culegere de probleme***, Edit. BIC ALL, Bucureşti, 1999.

25. SADIKU, M. O. ***Elements of Electromagnetics***, Oxford University Press 5th Edition, 2009.

26. ALEXANDER C. SADIKU, M. O., ***Fundamentals of Electric Circuits***, McGraw-Hill, 5th Edition, 2012.

27. IDA, N., ***Engineering Electromagnetics***, Springer, 2nd Edition , 2007.

28. DORF R. C., SVOBODA J. A. ***Introduction to Electric Circuits***, Wiley, 8th edition, 2010.

29. HAYT, W., KEMMERLY, J., DURBIN S. ***Engineering Circuit Analysis***, McGraw-Hill, 8th edition, 2011.

30. CHENG. D. K. ***Field and Wave Electromagnetics***, Addison-Wesley, 2nd Edition, 1989.

31. NILSSON J. W., RIEDEL S. ***Electric Circuits*** Prentice Hall, 9th edition. 2010.

32. KRAUS, J. D. ***Electromagnetics with Applications***, McGraw-Hill, 5th Edition, 1999.

33. EDMINISTER, J., ***Schaum's Outline of Electromagnetics***, McGraw-Hill, 4th Edition, 2013.

34. NAHVI, M., EDMINISTER, J., ***Schaum's Outline of Electric Circuits,***, McGraw-Hill, 5th Edition, 2011.

35. POPOVIC, Z., POPOVIC, B. D. ***Introductory Electromagnetics***, Prentice Hall, 1999.